
Feuille de T.D. 2
(Fonctions de deux variables, dérivées partielles et optimisation)

Exercice 1 :

Déterminer et représenter graphiquement l'ensembles de définition de chacune des fonctions :

a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$

b) $f(x, y) = 2 + \sqrt{-(x-y)^2}$

c) $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$

Exercice 2 :

Donner les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1) $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$

2) $f(x, y) = y^5 - 4y^4 + 4xy^2 - x^2$

Exercice 3 : (examen 2017)

On considère la fonction de production dite de Cobb-doglass :

$$F(K, L) = 3K^{\frac{1}{6}}L^{\frac{5}{6}}$$

où K représente le stock de capital, L le travail.

1. Montrer que la fonction F est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
2. Calculer l'élasticité de la production par rapport à chacun des deux facteurs. Donner une interprétation économique.
3. Écrire la relation d'Euler relative à cette fonction.

Exercice 4 : (examen 2015)

Soit la fonction de deux variables suivante :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 6$$

- 1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f .
- 2) Déterminer les deux points critiques de f et préciser leurs natures.

Exercice 5 :

Déterminer pour les fonctions suivantes les points critiques et préciser leurs natures(maximum ou minimum).

1) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y$

2) $f(x, y) = x^2 + y^4 - 2y^2$

3) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

4) $f(x, y) = x^4 + x^2y - x^2 - y$

Exercice 6 : (examen 2015)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2$$

On appelle $(\mathcal{P})$ le problème d'optimisation de la fonction f sous la contrainte $2x + y = 1$.

- 1) Ecrire le Lagrangien $L(x, y, \lambda)$ correspondant au problème $(\mathcal{P})$ et déterminer les dérivées partielles premières et secondes de $L(x, y, \lambda)$.
- 2) En déduire le seul point critique de ce problème.
- 3) Déterminer sa nature.

Exercice 7 :

On considère la fonction :

$$F(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{y}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_F de la fonction F .
2. Montrer que la fonction F est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.
3. Calculer l'élasticité de la fonction F par rapport à chacun des deux facteurs.
4. Écrire la relation d'Euler relative à cette fonction.