



**Université Mohamed
Premier**

**Cours/TD de microéconomie
Semestre 1**

Pr: Imane Ouchen

Email:

imane.ouchen@ump.ac.ma



Première partie

La théorie du comportement du consommateur

I.2. Définition de la fonction d'utilité

1.2.1. La fonction d'utilité est la traduction mathématique de l'échelle des préférences exprimée par un individu (I) face à plusieurs alternatives de consommations qui se présentent à lui.

1.2.2. Elle exprime le degré de satisfaction, c'est-à-dire la valeur numérique de l'utilité que procure à l'individu (I) la consommation d'un « panier » de n biens, au cours d'une période (T) déterminée.

La fonction d'utilité est donnée par la relation générale suivante :

$$U = f(C) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Expressions particulières de la fonction d'utilité

Consommation de deux biens

$$U = f(C) = f(x_1, x_2)$$

Consommation d'un seul bien

$$U = f(x)$$

Expression mathématique de l' U_{mg}

3.3. La définition précédente de l'utilité marginale U_{mg} peut être exprimée mathématiquement de la manière suivante :

On sait que $U_t = f(x)$ est l'expression de la fonction de l'utilité totale U_t. Elle exprime le degré d'utilité que procure à un individu la consommation de quantités variables x du bien X

Elle est par ailleurs supposée continue en vertu du postulat P3. Ainsi, si Δx représente la variation de la quantité consommée du bien X, l'utilité totale représente la variation correspondante ΔU de $U_t = f(x)$.

On définira l'utilité marginale U_{mg_x} du bien X comme la limite du rapport $\Delta U_t / \Delta x$ quand Δx tend vers zéro. L'utilité marginale U_{mg_x} du bien X exprime donc la variation de l'utilité U_t consécutive à une variation infinitésimale de la quantité x.

Expression mathématique de l' Umg

Or on sait qu'en mathématiques, la limite du rapport $\Delta U_t / \Delta x$ quand Δx tend vers zéro exprime la dérivée de la fonction $U_t = f(x)$

C'est à dire :

$$Umg = U' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U_t}{\Delta x}$$

Finalement, on peut écrire que :

$$Umg = f'(x) = \frac{dU_t}{dx}$$

Expression mathématique de l'Umg

L'utilité marginale d'un bien X est calculée à l'aide de la dérivée de la fonction d'utilité totale. Elle exprime la variation de l'utilité totale induite par la variation d'une unité du bien consommé.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'utilité est fonction de la consommation d'un seul bien. On avait en effet posé $n = 1$.

Abandonnons ce cas particulier et plaçons-nous dans le cas général où les besoins des individus s'expriment à l'endroit de plusieurs biens de sorte que l'on ait :

$$U_t = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Par un raisonnement identique au cas précédent, il est possible de déterminer la variation de l'utilité que procure au consommateur la variation de la quantité consommée de chacun des biens. On applique pour cela le concept connu en mathématique sous le nom de dérivée partielle.

Expression mathématique de l' U_{mg}

Pour simplifier, supposons, dans un premier temps que $n = 2$. Cela signifie que la fonction d'utilité de (I) prend la forme d'une fonction à deux variables. Soient x la première variable et y la seconde. On peut donc écrire $U_t = f(x, y)$.

A. La dérivée partielle de U_t par rapport à x qui exprime, on le sait maintenant, l'utilité marginale procurée par le bien X est donnée par l'équation :

$$U'_t x = Umg_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta U_t / \Delta x = \delta U_t / \delta x$$

B. De même, la dérivée partielle de U_t par rapport à y qui exprime l'utilité marginale procurée par le bien y est donnée par l'équation :

$$U'_t y = Umg_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta U_t / \Delta y = \delta U_t / \delta y$$

Expression mathématique de l' U_{mg}

C. Finalement, lorsque $U_t = f(x, y)$ on a :

$$Umg_x = \delta U_t / \delta x$$

$$Umg_y = \delta U_t / \delta y$$

et en généralisant à n biens, on aura pour $U_t = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$:

$$Umg_{x1} = \delta U_t / \delta x1; Umg_{x2} = \delta U_t / \delta x2; Umg_{x3} = \delta U_t / \delta x3; \dots; Umg_{xn} = \delta U_t / \delta xn$$

Les courbes d'indifférence

1. Reprenons la fonction $U_t = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Elle signifie, rappelons le, que l'utilité est fonction du complexe de biens

$$C = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Supposons que ce complexe de biens se réduise à la combinaison de deux biens

X et Y tels que :

$$U_t = f(C) = f(x, y).$$

2. Les courbes d'indifférence

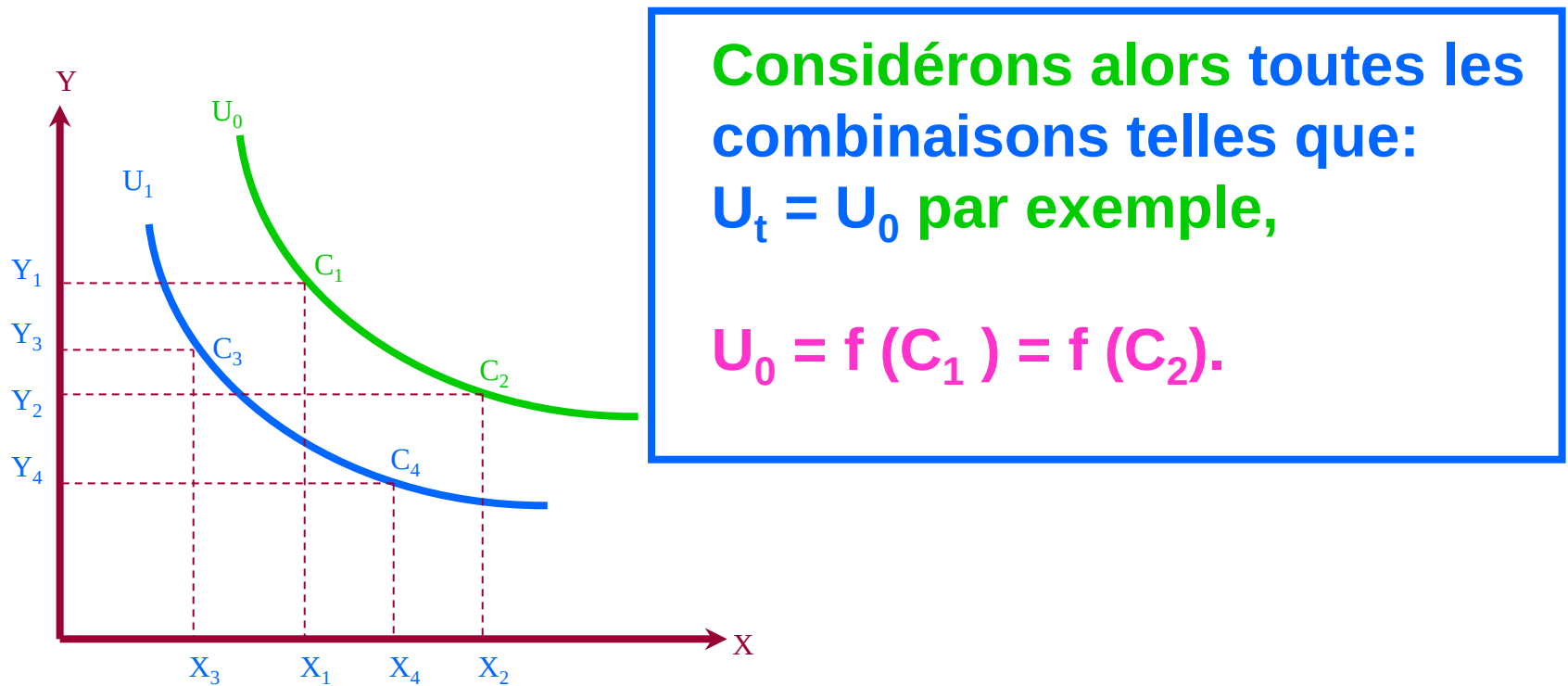


Fig. 1 Courbes d'indifférence

Considérons de même toutes les combinaisons telles que $U_t = U_1 \neq U_0$; par exemple $U_1 = f(C_3) = f(C_4)$.

3. Les courbes d'indifférence

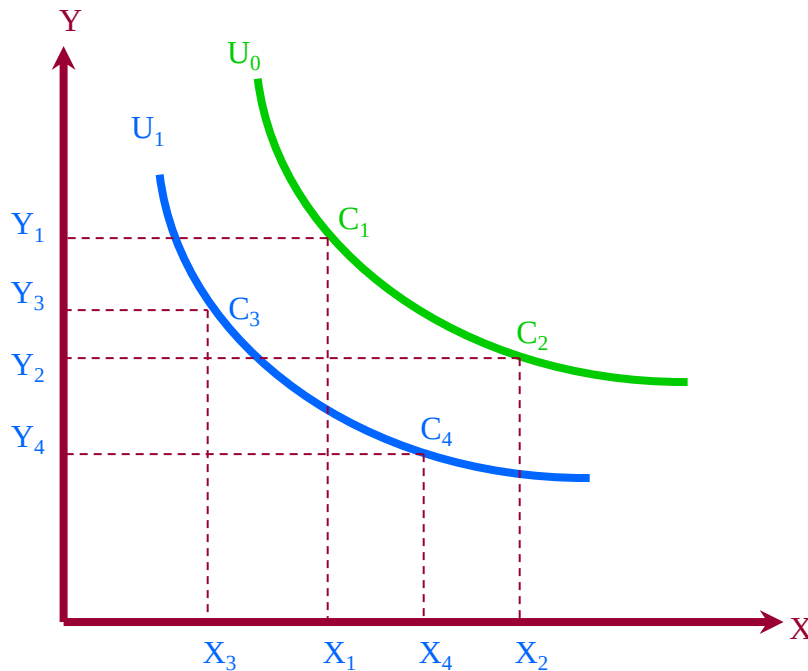


Fig. 1 Courbes d'indifférence

On dira que les combinaisons de biens qui procurent un même niveau d'utilité sont situées sur une même courbe d'indifférence.

4.2. Sur la fig.1 ci-contre, les combinaisons de biens C_1 et C_2 sont situées sur la même courbe :

Elles procurent au consommateur (I), le même niveau d'utilité U_0 .

4. Les courbes d'indifférence

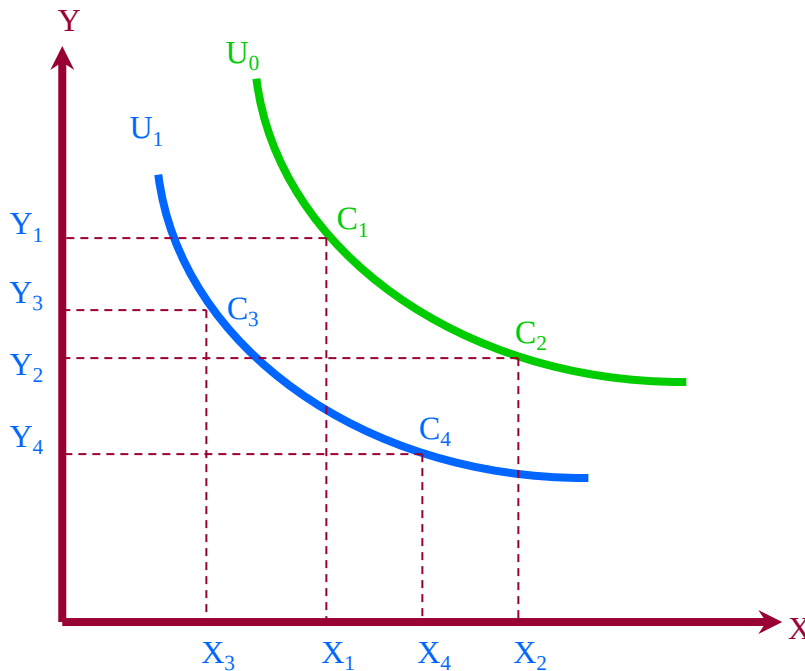


Fig. 1 Courbes d'indifférence

- De même, les combinaisons de biens C_3 et C_4 sont situées sur une même courbe :

- elles procurent au consommateur le même niveau d'utilité U_1 .

4. Les courbes d'indifférence

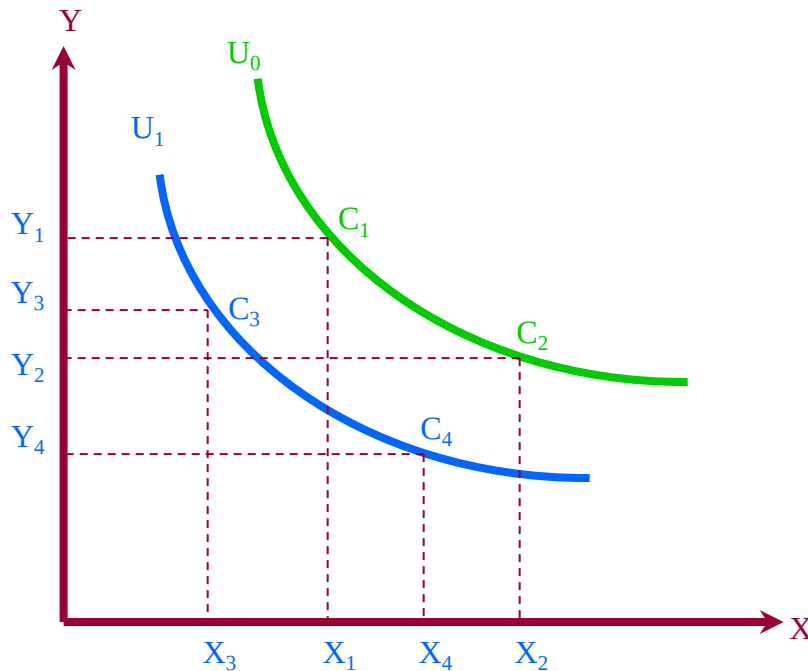


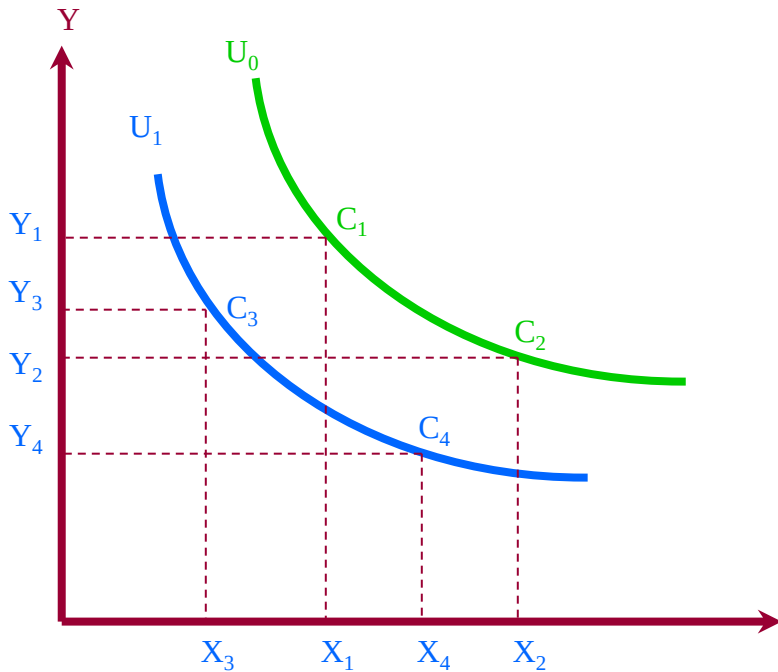
Fig. 1 Courbes d'indifférence

4.3. La courbe d'indifférence peut donc être définie, dans le cas général

(où $C = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$)

comme le lieu géométrique de tous les complexes de biens qui procurent à l'individu (I) le même niveau d'utilité.

4.1. Les trois propriétés des courbes d'indifférence



P1. Les CI ont une inclinaison ou pente négative : ce sont des courbes « descendantes » représentant des fonctions décroissantes.

P3. Les CI sont convexes par rapport à l'origine des axes de coordonnées : une diminution de la quantité de l'un des deux biens est compensée par une augmentation de la quantité consommée de l'autre bien.

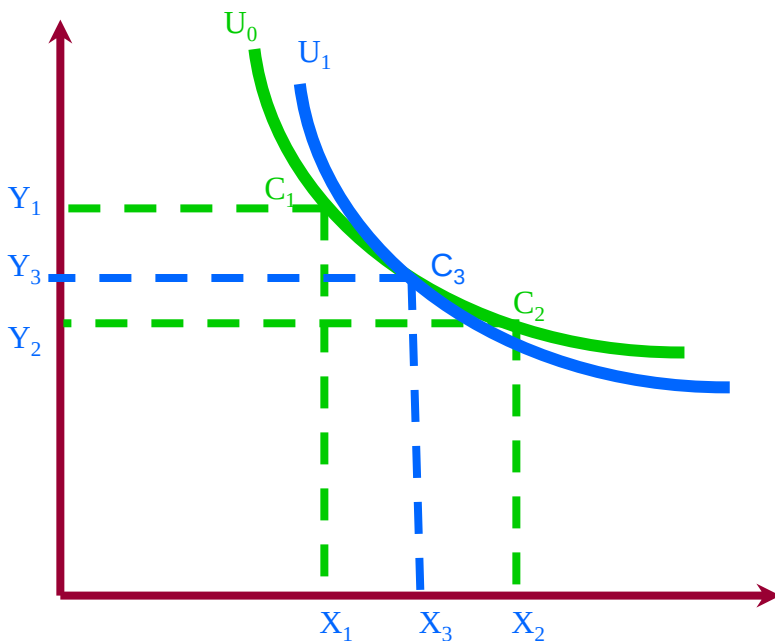
P2. Les CI d'un même individu ne peuvent se couper : dans le cas contraire cela signifierait qu'il existe plusieurs niveaux d'utilité pour une même combinaison de biens, ce qui serait contraire au postulat (P1) de la fonction d'utilité tel que défini plus haut.

4.2. Les trois propriétés des courbes d'indifférence

- Pourquoi deux CI d'un même consommateur ne peuvent se couper?

Le point $C_3(x_3, Y_3)$ qui est est situé à la fois sur la courbe U_1 et U_2 est en contradiction avec la définition de la Courbe d'indifférence en particulier compte tenu de la propriété P2 de la CI.

En effet, dans ce cas de figure, cela signifie qu'il existe deux niveaux d'utilité pour une même combinaison (c_2) de biens!

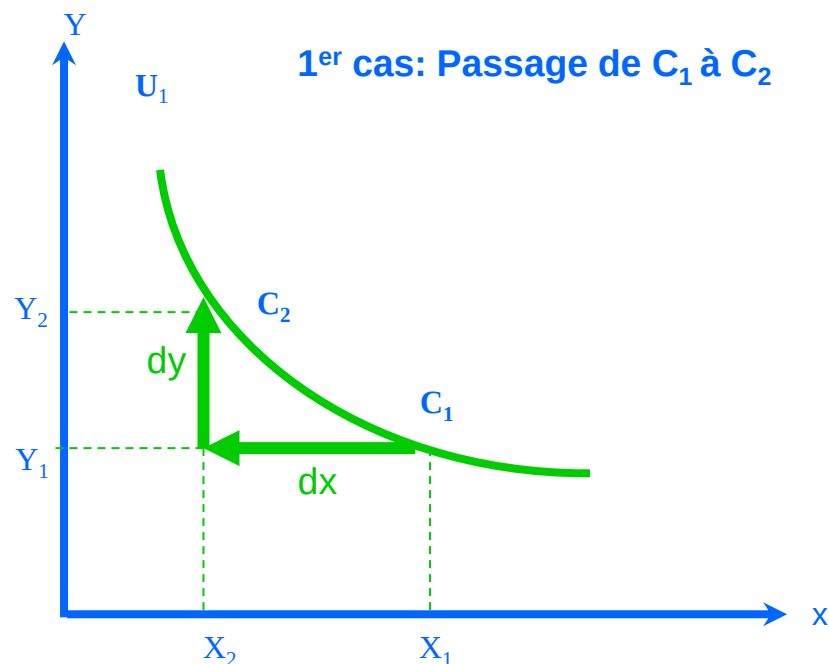


Ce qui serait contraire au postulat (P1) de la fonction d'utilité tel que défini plus haut.

5. TMS: Définition et Illustration graphique

1^{er} cas

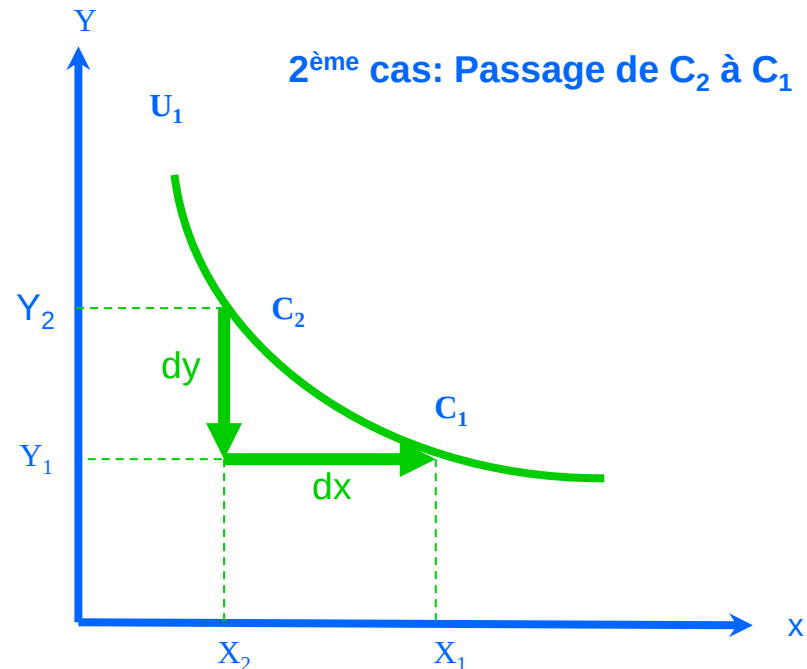
Le $TMS_{x \rightarrow y}$ est l'instrument qui permet au consommateur de déterminer la quantité (dx) du bien X à laquelle il renonce pour lui substituer une certaine quantité (dy) du bien Y de telle sorte qu'il conserve le même niveau d'utilité.



5. TMS: Définition et Illustration graphique

2^{ème} cas

Le $TMS_{y \text{ à } x}$ permet, à l'inverse, de déterminer la quantité (dy) du bien y à laquelle renonce le consommateur pour lui substituer une certaine quantité (dx) du bien x de telle sorte qu'il conserve le même niveau d'utilité.



5.1 TMS: EXPRESSION MATHEMATIQUE

- Nous savons qu'une variation des quantités consommées des biens X et Y, implique normalement une modification du degré d'utilité.
- Appelons dU_t la variation de l'utilité totale $U_t = f(x,y)$, suite aux variations dx et dy des quantités respectives du bien X et du bien Y.
- On se rappelle par ailleurs que
 - $Umg_x = \delta U_t / \delta x$ et $Umg_y = \delta U_t / \delta y$
- On se rappelle également que les utilités marginales représentent les variations de l'utilité totale suite à une variation unitaire de x (respectivement de y).
- La variation de l'utilité totale dU_t sera donc égale à :

5.1 TMS: EXPRESSION MATHEMATIQUE

$$dU_t = (\partial U_t / \partial x) dx + (\partial U_t / \partial y) dy$$

Ou encore :

$$dU_t = U m g_x dx + U m g_y dy$$

Expression qui représente la différentielle totale de
l'équation $U_t = f(x, y)$

5.1 TMS: EXPRESSION MATHEMATIQUE

- Mais si le consommateur (I) désire conserver le même niveau d'utilité tout en substituant une quantité de X à une quantité de Y, cela signifie qu'il reste sur la même courbe d'indifférence.

- Cela signifie aussi que $U_t = f(x,y) = U_0$, où U_0 reste constant lorsque varient les quantités consommées.

- On aura par conséquent, $dU_t = 0$ (la variation de l'utilité totale est égale à 0). Autrement dit on aura :

5.1 TMS: EXPRESSION MATHEMATIQUE

$$(\delta U_t / \delta x)dx + (\delta U_t / \delta y)dy = 0 \Rightarrow (\delta U_t / \delta x)dx = -(\delta U_t / \delta y)dy$$

Ce qui donne, en définitive

$$\frac{(\delta U_t / \delta x)}{(\delta U_t / \delta y)} = \frac{-dy}{dx} = \frac{Umg_x}{Umg_y}$$

Ce qui montre que le TMS_{y à x} est égal au rapport des utilités marginales des deux biens.

5.2 Commentaires

A. L'expression précédente montre que le rapport des utilités marginales est égal à l'opposé de la dérivée de la fonction

$$y = f(x)$$

B. La fonction $y = f(x)$ donne la variation de la quantité y quand varie la quantité x .

L'expression dy/dx est la pente de la courbe d'indifférence représentative de la fonction $y = f(x)$: elle est donc négative (cf. supra, propriété 4.1. des CI).

Par définition, la quantité $(- dy/dx)$ est le taux marginal de substitution de y à x .

On vient de démontrer que le TMS _{y à x} est égal au rapport des utilités marginales des deux biens.

Chapitre II

La maximisation de la fonction de l'utilité

I. Position du problème

Nous avons vu que l'objectif du consommateur était d'optimiser son utilité.

Or, sa fonction d'utilité dépend des quantités des biens X_n auxquels il peut accéder. On a en effet

$$U_t = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad 1$$

L'acquisition de quantités déterminées dépend des prix (p_i) de ces biens et de la consistance de son revenu (R).

I. Position du problème

S'il décide de consacrer son revenu à l'achat de tous les biens X_n on aura :

- $$R = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \dots + p_nx_n \quad 2$$

- L'égalité 2 est appelée « équation du budget » ou encore « équation du revenu »

I. Position du problème

Le problème du consommateur est donc un problème lié, (on dit aussi « sous contrainte »).

Il cherche en effet, à maximiser son utilité en tenant compte à la fois de son revenu et des prix des biens que lui impose le marché.

Transcrit mathématiquement ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Max. } U_t = f(x_i) \\ \text{s / c. } R = \sum_i^n p_i x_i \end{cases} \quad 3$$

•Ecrit sous forme condensée l'équation (2) précédente du budget devient l'équation (3) ci dessus

I. Position du problème

Supposons pour simplifier que $U_t = f(x,y)$ et que les prix des biens X et Y soient respectivement :

p_x et p_y , le problème général précédent s'écrit (dans ce cas particulier) où les choix du consommateur sont limités à deux biens :

$$\begin{cases} \text{Max. } U_t = f(x, y) \\ \text{s / c. } R = xp_x + yp_y \end{cases} \quad 4$$

Dans ce cas particulier, l'équation (4) du revenu du consommateur représente une droite dite « droite du budget ».

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

- Reprenons l'équation de la droite du budget du consommateur I.
- On se souvient que dans le cas de deux biens X et Y, elle était de la forme :
 - $R = x \cdot p_x + y \cdot p_y$
- Tirons de cette équation, la valeur de y, on aura :

$$y = \frac{R - x \cdot p_x}{p_y} \quad 5$$

L'équation de revenu (5) du consommateur représente ici, l'équation d'une droite appelée « droite du budget » du consommateur!

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

- Reprenons de même, la fonction d'utilité

- $U_t = f(x, y)$. En remplaçant y par sa valeur dans l'expression de U , on obtient

$$U_t = f(x, (R - x \cdot p_x) / p_y)$$

- Ce résultat montre que la fonction initiale du problème posé est devenue une fonction à une seule variable.

- Par ailleurs, on sait qu'une fonction de la forme

$$U_t = f(x)$$

- admet un maximum au point x_0 lorsque :

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

1/ la dérivée première U_t' est égale à 0.

$$\text{Soit } U_t' = 0$$

C'est la condition de 1^{er} ordre

2/ la dérivée seconde U_t'' est négative. C'est à dire

$$U_t''(x_0) < 0$$

C'est la condition de 2^{ème} ordre

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

•Exemple d'application

•La fonction d'utilité d'un consommateur supposé rationnel, est donnée par l'équation $U_t = 2xy$.

Soit $p_x = 2$ Dh le prix du bien X et $p_y = 1$ Dh le prix du bien Y.

•Le consommateur dispose par ailleurs d'un revenu R égal à 10 Dh qu'il décide de consacrer entièrement à l'achat des biens X et Y.

•Quelles vont être les quantités du bien X et du bien Y qui maximisent l'utilité de ce consommateur ?

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

1^{ère} méthode pour trouver la solution

A. On a

$$R = x.p_x + y.p_y$$

c'est à dire

$$R = 2x + y$$

d'où l'on tire :

$$y = R - 2x \quad 1$$

Remplaçons y par sa nouvelle valeur dans l'expression de U . On obtient :

$$U_t = 2x (R - 2x)$$

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

1ère méthode pour trouver la solution

ou encore

$$U_t = -4x^2 + 2xR \quad 2$$

Comme on a $R = 10$, on peut écrire :

$$U = -4x^2 + 20x \quad \text{à partir de l'équation (2).}$$

La dérivée première de l'équation U ci-dessus est alors :

$$U_t' = -8x + 20 \quad 3$$

d'où, quand $U_t' = 0$ il vient : $x = 20/8 = 5/2 = 2,5$

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

1^{ère} méthode pour trouver la solution

B. Remplaçons donc x par sa valeur dans l'équation (1) on aura :

$$y = R - 2 \cdot (5/2) = R - 5$$

comme $R = 10$ on obtient finalement :

$$y = 10 - 5 = 5$$

Le couple (x, y) tel que $x = 5/2$ et $y = 5$ est le point qui annule la dérivée $U_t' = 0$.

Vérifions donc que $U_t'' < 0$.

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

Reprenons l'équation (3). Sa pente est égale à (-8).

Ceci montre que la dérivée de U_t' est bien négative : CQFD.

La combinaison de biens X et Y telle que $x = 5/2$ et $y = 5$ est bien la combinaison qui permet au consommateur de maximiser sa fonction d'utilité.

C'est la solution au problème lié présenté sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max. } U_t = 2xy \\ \text{s.t. } R = 2x + y \end{cases}$$

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

- **2ème méthode**

- **C/** Il existe une 2ème méthode **plus générale** de résolution de ce type de problème « sous contrainte » :
- C'est la « **méthode de Lagrange** ».

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

- 2ème méthode
- On démontre que les problèmes d'optimisation sous contrainte de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max. (Min.) } f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \text{s/c } g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

admettent des solutions identiques à celles des fonctions de type :

- $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =$
- $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

 (2)

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

- 2ème méthode

- λ est appelé « multiplicateur de Lagrange ».
- Il joue le rôle d'une variable comme les autres dans l'expression de la fonction (2) ci dessus.
- Nous préciserons par la suite sa signification économique dans le cadre du problème particulier de la maximisation de la fonction d'utilité d'un consommateur.

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

La condition nécessaire pour que la fonction (2) admette un maximum, est que ses dérivées partielles par rapport à $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ et λ soient nulles en même temps.

Le problème consiste donc à résoudre le système d'équation à $(n+1)$ variables de la forme :

Reprenons notre exemple précédent. On avait :

$$\begin{cases} \text{Max. } U_t = f(x, y) \\ \text{s/c } R = x \cdot p_x + y \cdot p_y \end{cases} \quad (1)$$

Formons la fonction (2) de la même manière que précédemment. Il vient :

$$F(x, y) = 2xy + \lambda (R - 2x - y) \quad (2)$$

$$S \quad \left\{ \begin{array}{l} F'_{x1} = 0 \\ F'_{x2} = 0 \\ \vdots \\ F'_{xn} = 0 \\ F'_{\lambda} = 0 \end{array} \right.$$

II. Les conditions de maximisation de la fonction de l'utilité

Pour maximiser la fonction d'utilité du consommateur, il suffit donc de résoudre le système d'équations (S ') ci après :

$$(S') \quad \begin{cases} F'_x = 2y - 2\lambda = 0 \\ F'_y = 2x - \lambda = 0 \\ F'_\lambda = 10 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

Après calcul, par la méthode directe ou par la méthode des déterminants on obtient : $x = 5/2$; $y = 5$ et $\lambda = 5$.

Cette solution correspond bien au résultat trouvé par la première méthode.

Signification économique du multiplicateur de Lagrange :

- Reprenons le système d'équation (S') dans le cas général.
- A partir des deux premières équations de (S'), il vient :
- $F'_x = U'_{tx} - \lambda p_x = 0 \Rightarrow \lambda = U'_{tx}/p_x = (\delta U_t / \delta x) / p_x$
- $F'_y = U'_{ty} - \lambda p_y = 0 \Rightarrow \lambda = U'_{ty}/p_y = (\delta U_t / \delta y) / p_y$

Signification économique du multiplicateur de Lagrange :

Ces résultats montrent que le multiplicateur λ est égal aux utilités marginales des biens X et Y pondérées par leur prix

Par ailleurs, comme on a :

$$U'_{tx}/p_x = U'_{ty}/p_y \Leftrightarrow U'_{tx}/U'_{ty} = p_x/p_y$$

on peut énoncer que :

Signification économique du multiplicateur de Lagrange :

- Le consommateur atteint le niveau de son utilité maximale lorsque les utilités marginales pondérées par les prix sont égales ou encore :
- A l'équilibre, le rapport des utilités marginales est égal au rapport des prix des biens consommés.
- Revenons à la troisième équation de (S'). On peut l'écrire dans le cas général, de la manière suivante : $F'_\lambda = R - x \cdot p_x - y \cdot p_y = 0$.
- Ce qui revient à écrire que $R = x \cdot p_x + y \cdot p_y$. Si on dérive cette expression de R successivement par rapport à (x) puis par rapport à (y), il vient

$$\delta R / \delta x = p_x \text{ et } \delta R / \delta y = p_y .$$

Signification économique du multiplicateur de Lagrange :

On peut donc écrire : $U'_{tx} / U'_{ty} = [\delta U_t / \delta x] / [\delta U_t / \delta y]$ puisqu'on sait déjà que :

$U'_{tx} / U'_{ty} = p_x / p_y$. Il vient alors :

$$[\delta R / \delta x] / [\delta R / \delta y] = [\delta U_t / \delta x] / [\delta U_t / \delta y].$$

Enfin, on a

$$\delta U_t / \delta x = \lambda p_x \Rightarrow \lambda = (\delta U_t / \delta x) / p_x$$

$$\text{et } \delta U_t / \delta y = \lambda p_y \Rightarrow \lambda = (\delta U_t / \delta y) / p_y$$

(en vertu de la résolution des deux premières équations de S').

Or, on sait aussi que :

$$\delta R / \delta x = p_x \text{ et } \delta R / \delta y = p_y$$

Signification économique du multiplicateur de Lagrange :

$$\lambda = (\delta U_t / \delta x) / p_x = (\delta U_t / \delta x) / (\delta R / \delta x) \text{ de même}$$

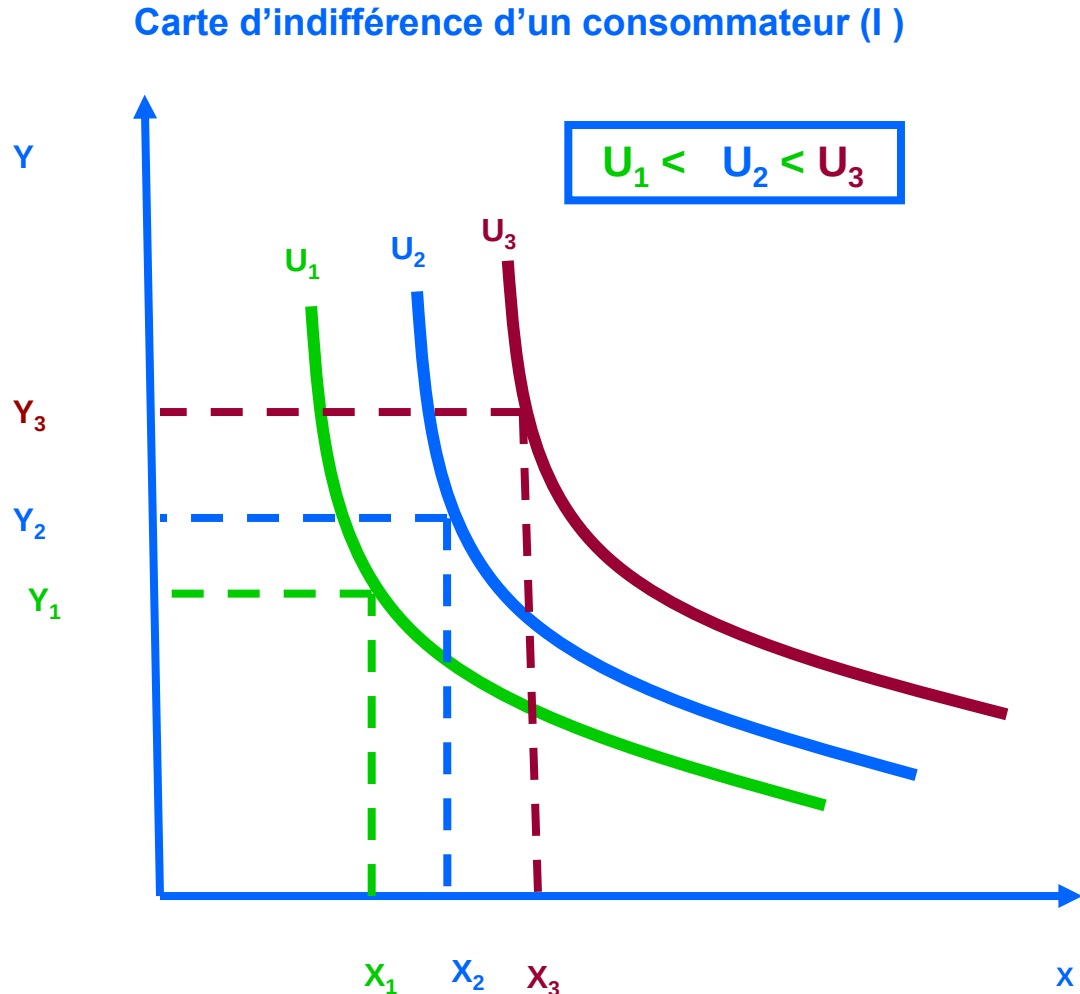
$\lambda = (\delta U_t / \delta y) / (\delta R / \delta y)$ et en simplifiant dans les deux cas,
il vient finalement :

$$\lambda = \delta U_t / \delta R$$

Ce qui signifie que λ exprime la variation de l'utilité totale quand le revenu du consommateur varie d'une unité

III - Représentation graphique de l'optimum du consommateur :

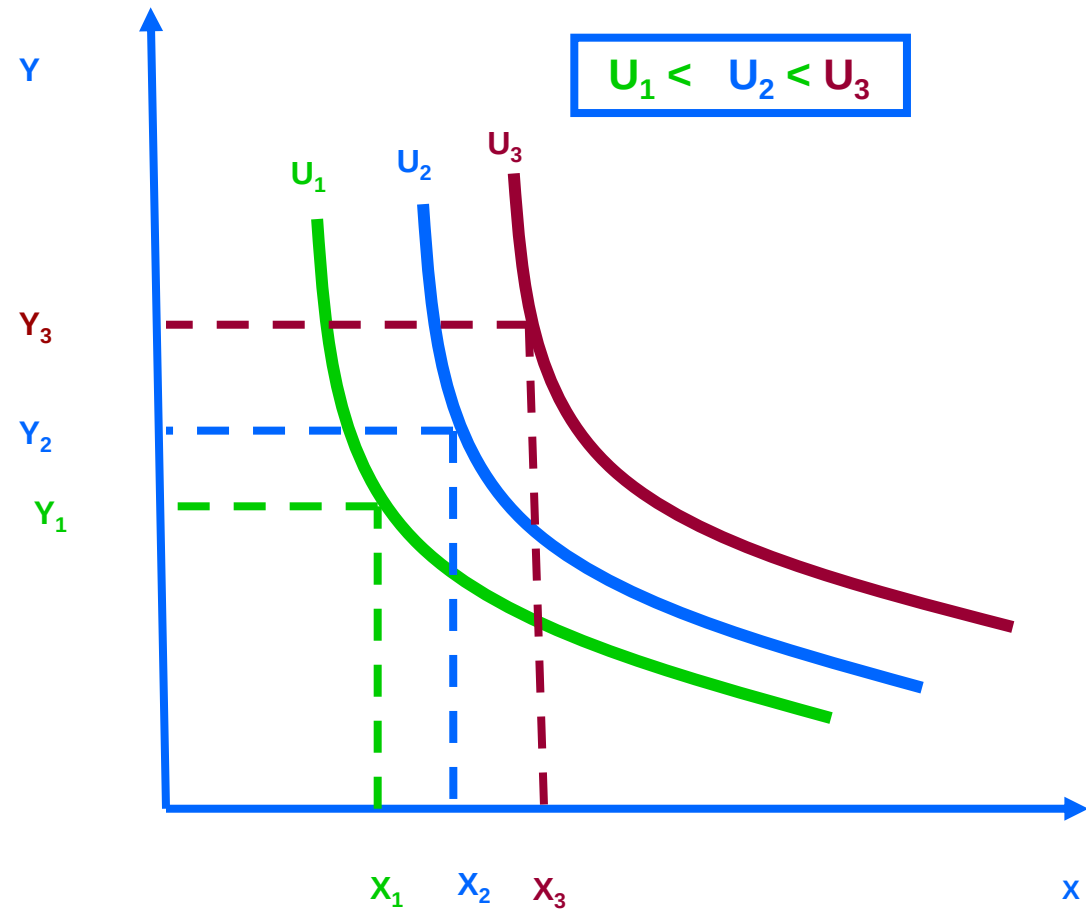
Nous savons maintenant que la fonction d'utilité d'un individu peut être exprimée graphiquement par une « carte d'indifférence », c'est à dire par plusieurs courbes d'indifférence qui indiquent les différents niveaux d'utilité obtenus à partir de quantités variables des biens consommés.



III - Représentation graphique de l'optimum du consommateur :

- Or les niveaux d'utilité varient en fonction de la variation du montant du revenu R lorsque les prix des biens ne changent pas eux-mêmes (cette question de l'effet de la variation des prix sera examinée plus loin, infra).

Carte d'indifférence d'un consommateur (I)



III - Représentation graphique de l'optimum du consommateur :

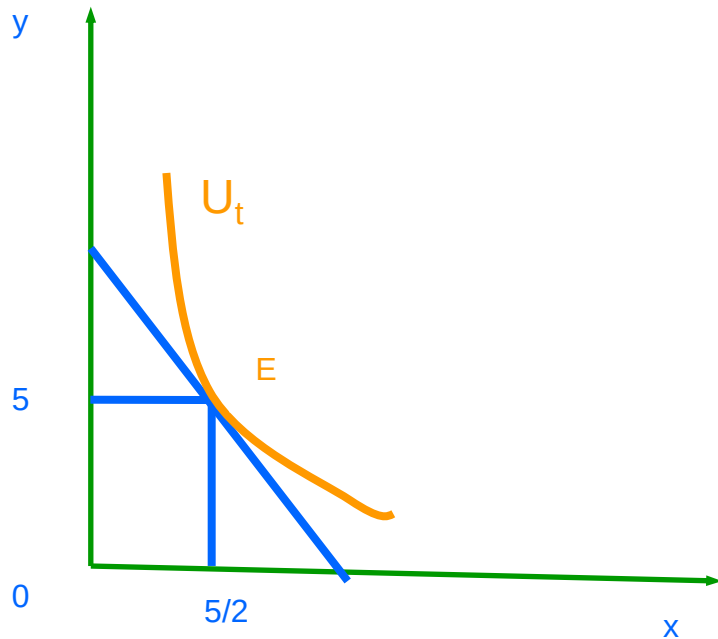


Fig.2 Equilibre du consommateur.

- Reprenons pour l'instant, notre exemple précédent où : $U_t = 2xy$ avec $p_x = 2$, $p_y = 1$ et $R = 10$.

Supposons que le consommateur (I) décide de consacrer entièrement son revenu R à la consommation du seul bien X , il pourra acheter au plus $x = R/p_x = 5$ unités du bien X . Ce point peut donc être représenté sur un graphique par le couple $(5, 0)$.

III - Représentation graphique de l'optimum du consommateur :

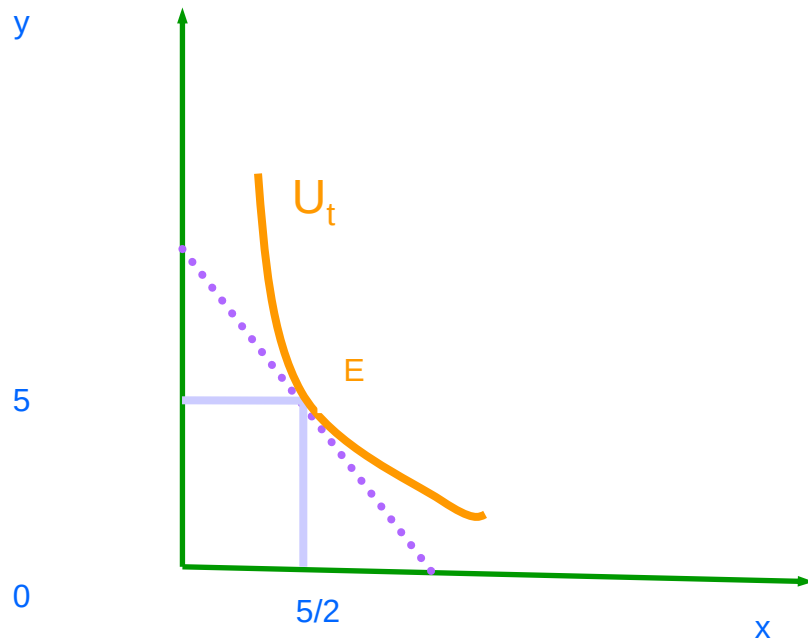


Fig.2 Equilibre du consommateur.

Dans le cas où au contraire, il décide de ne consommer que du bien Y , il obtiendra au plus une quantité $y = R/p_y = 10$ unités du bien Y .

Ce point peut être représenté sur le même graphique par le couple $(0, 10)$.

En joignant ces deux points on obtient la représentation graphique de la « droite de budget » du consommateur I .

III - Représentation graphique de l'optimum du consommateur :

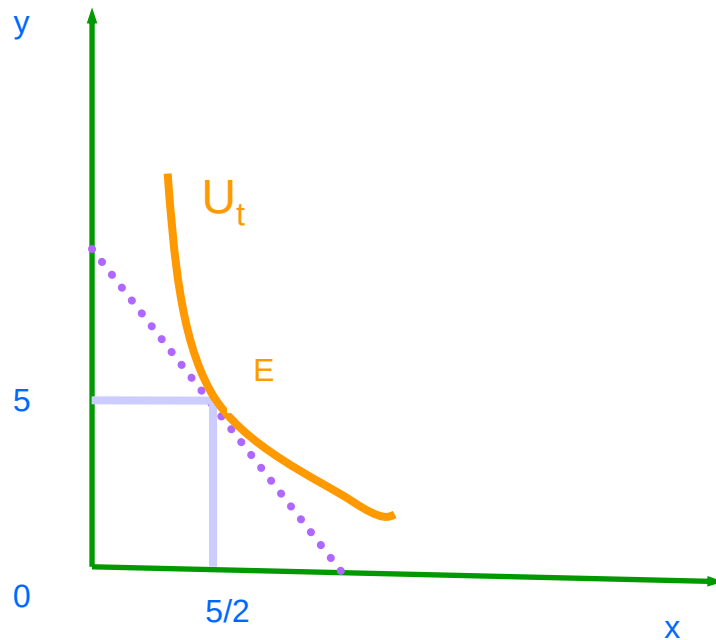


Fig.2 Equilibre du consommateur.

Le point **E** représente l'optimum du consommateur, tel que nous l'avons calculé précédemment.
Au point **E** ($x = 5/2$, $y = 5$), l'utilité maximale
 $U_t = 2xy = U_E = 25$.

Le point **E** sur le graphique montre que l'équilibre du consommateur (I) est atteint au point de tangence entre la courbe d'indifférence $U_t = 25$ et la droite de budget $y = R/p_y - x.p_x/p_y = - 2x + 10$