

Chp. I : Matrices

S₂ / Algèbre

H. Boukhriss

(1)

I - Généralités

I.1 : Def :

On appelle matrice à n lignes et p colonnes la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Le terme a_{ij} se situe à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
- On note M par $M = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p}}$ ou simplement

$$M = (a_{ij})$$

- On dit que M est de type (n, p) .
- On note $M(n, p)$ l'ensemble des matrices de type (n, p) .
- Si $n = p$, on dit que M est une matrice carrée d'ordre n et on note M_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Exple

$$- M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3)$$

$$- N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(3, 2)$$

$$- A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in M(4, 1)$$

matrice colonne

I-2 : Matrices particulières

(2)

I-2-1 : Matrice nulle

C'est une matrice ayant pour terme général : $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

I-2-2 : Matrice identité ou unité

C'est la matrice carrée d'ordre n ayant pour terme général :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Où la note : I_n

Exp $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I-2-3 : Matrice transposée

Soit $A \in M(n, p)$. La transposée de A est notée : tA .

${}^tA \in M(p, n)$. Elle est obtenue en échangeant les lignes

en colonnes de A :

$$B = {}^tA \quad \text{ssi} \quad b_{ij} = a_{ji} \quad \left(\begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix} \right) \quad \text{ssi} \quad {}^tB = A$$

Exp ${}^tA = (1 \ 2 \ 5) \in M(1, 3) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in M(3, 1)$

$$- A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

I-2-4 : Matrices diagonales

Def: Soit $A \in M_n$ tq: $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

A est une matrice diagonale si tous les éléments non diagonaux de A sont nuls: ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad " \quad " \quad " \quad 4$$

I-2-5 : Matrices triangulaires

Def: Une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est une matrice carrée dans laquelle, tous les éléments situés en dessous (ou au dessus) de la diagonale principale sont nuls.

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure d'ordre 3

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure d'ordre 4

I-2-6 : Matrices symétriques

Def: Une matrice symétrique est une matrice carrée dans laquelle les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

(4)

Exp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = {}^t A \text{ est une matrice symétrique}$$

I-2-7: Matrices antisymétriques

Def: Une matrice antisymétrique est une matrice carrée, dans laquelle les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale sont de signe opposés: $(a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j; i \neq j)$

Exp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -7 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique

II - Opérations usuelles sur les matrices

II-1: Égalité

Def Deux matrices A et B de $M(n, p)$ sont égales si elles ont les mêmes coefficients:

$$A = B \text{ssi } a_{ij} = b_{ij} ; \forall 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq p$$

avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$

Exp

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = B \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 4$$

Prop ${}^t A = {}^t B$ ssi $A = B$

II-2: Addition

Def Soient A et B deux matrices de $M(n, p)$. La matrice C de $M(n, p)$ défini par: $(c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} / 1 \leq i, j \leq n)$ s'appelle la matrice somme de A et B.

On note: $[C = A + B]$.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés:

1. $\forall A, B, C \in M(n, p); (A+B)+C = A+(B+C)$
2. $\forall A, B \in M(n, p); A+B = B+A$
3. $\forall A, B \in M(n, p); {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

II-3: Multiplication par un scalaire

Def: Soit $A \in M(n, p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $C \in M(n, p)$ définie par: $C_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \left(\begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p \end{matrix} \right)$ s'appelle la matrice produit de A par λ .

On note: $C = \lambda \cdot A$.

Propriété:

1. $\forall A \in M(n, p); \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}; (\lambda + \beta) \cdot A = \lambda A + \beta A$
2. $\forall A, B \in M(n, p); \forall \lambda \in \mathbb{R}; \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Expls

1. $A \in M(n, p)$ et $\lambda = 1 \Rightarrow 1 \cdot A = A$.

2. $A \in M(n, p)$ et $\lambda = 0 \Rightarrow 0 \cdot A = O_{n,p}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $\lambda = -1$

$$(-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

II - 4 : Produit de deux matrices

(6)

Def Soit A une matrice de $M(n, m)$ et B une matrice de $M(m, p)$

La matrice C de $M(n, p)$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (\forall 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p) \text{ s'appelle}$$

la matrice produit de A par B .

- On note : $C = A \times B$.

- La multiplication de A et B est possiblessi le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B .

Exp

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -8 & -14 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or on ne peut pas calculer $B \times A$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Car le nombre de colonnes de B est égale à 2
et le nombre de lignes de A est égale à 3.

Propriétés

(7)

1. Soit $A \in M_n$, $A \times I_n = I_n \times A = A$

2. $\forall A \in M_{(n,m)}$; $\forall B, C \in M_{(m,p)}$:

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

3. $\forall A \in M_{(n,m)}$; $\forall B \in M_{(m,p)}$;

$${}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A$$

4. La multiplication de deux matrices n'est pas commutative. ($A \times B \neq B \times A$, En général)

5. La multiplication des matrices est associative:

$$(A \times (B \times C)) = (A \times B) \times C$$

Rq: En général, $A \times B = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = (a_{11}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{1m}) \in M_{(1,m)}$

et $B = \begin{pmatrix} b_{m1} \\ \vdots \\ b_{kn} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \in M_{(m,1)}$

$$\Rightarrow C = A \times B = (a_{11}b_{m1} + \dots + a_{1k}b_{kn} + \dots + a_{1m}b_{m1})$$

Exp $A = (1, 3, -1, 2, 0)$ et $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \times B = (-3 + 15 + 8) = (20)$$

(20) est une matrice avec une seule ligne et une seule colonne

Def (Puissance d'une matrice)

Soit $A \in M_n$. On définit la puissance de A par:

$$A^p = \underbrace{A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}, (\forall p \in \mathbb{N}^*); \quad A^0 = I_n / A^1 = A$$

IV Matrices inversibles

(8)

Def Une matrice $A \in M(n)$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in M(n)$ de même format que A qui vérifie :

$$AB = BA = I_n$$

- On note : $B = A^{-1}$

- La matrice B s'appelle la matrice inverse de A

- Rq's
- 1- Certaines matrices n'ont aucun inverse
 - 2- Il existe des matrices qui ont uniquement un inverse à gauche ou à droite.
 - 3- L'inversibilité d'une matrice nécessite que la matrice commute par la multiplication.

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = BA = I_3 \Rightarrow B \text{ est la matrice inverse de } A$$

Th Si A et B de $M(n)$ sont inversibles, alors $A \times B$ est inversible et : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

En particulier, si $A \in M(n)$ est inversible, alors $(A^P, (p \in \mathbb{N}^*))$ est inversible et $[(A^P)^{-1} = (A^{-1})^P]$