

Chpt II : Déterminant d'une matrice / S2 / Algèbre

(12)

V. Déterminant d'une matrice

Def V-1. Calcul du déterminant

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2)$$

Le déterminant d'ordre deux de A est défini par :

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\text{On note : } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Rq : Si $A = (a_{ii}) \in \mathcal{M}(1) \Rightarrow \det A = a_{11}$.



Def Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}(n)$.

On appelle le mineur de a_{ij} le déterminant de la matrice A_{ij} d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j .

$$\text{On note : } [\det A_{ij} = \Delta_{ij}]$$

Exp 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Le mineur de 1 est : $\Delta_{11} = \det A_{11} = 4$

$$2) A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{33} = \det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\Delta_{32} = \det A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

Def

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}} \in M(n)$.

(13)

Le déterminant d'ordre n de A est défini par :

- la formule du développement du déterminant de A suivant la ligne :

$$\forall i \leq n; \quad \left[\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} \right]$$

- la formule du développement du déterminant de A suivant la

colonne j :

$$\forall j \leq n; \quad \left[\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj} \right]$$

Théorème

Le développement d'un déterminant est indépendant de la ligne ou de la colonne choisie.

Exo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A$? suivant la colonne 1 ($j=1$)

$$\det A = (-1)^2 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3 \times 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \times 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 3 \times 12 + 2 \times (-2) = -3 - 36 - 4 = -43$$

$\det A$? suivant la ligne 2 ($i=2$)

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -43$$

Rq En pratique, pour le développement d'un déterminant, on affecte à chaque élément un signe, en commençant par + et en respectant une alternance entre 2 lignes.

Par exemple, $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} + & - & + \\ + & - & + \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} + & - & + \\ + & - & + \end{vmatrix}$

V.2. Propriétés des déterminants

(14)

Prop 1 Un déterminant est nul si :

- ⊗ a. l'une des colonnes ou l'une des lignes est nulle
- b. Deux lignes ou deux colonnes sont égales ou proportionnelles
- ⊗ c. une ligne (ou une colonne) est combinaison linéaire des autres lignes. (ou des autres colonnes)

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Les cols 1 et 2 sont égaux)

Prop 2 ⊗ Si on multiplie tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par le même scalaire, alors le déterminant est multiplié par ce scalaire.

Exp $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple ⊗ Si $A \in M(n)$; alors $[\det(LA) = L^n \det(A)]$

Prop 3 Un déterminant ne change pas si :

(exp) a. ~~On permute simultanément 2 lignes et 2 colonnes.~~

Non ⊗ b. $\det({}^t A) = \det(A)$

⊗ c. on ajoute à une ligne (resp une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp colonnes)

$$L_m + L_k$$
$$C_m + L C_k$$

Exp

$$* A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -L_1 \\ -L_2 \\ -L_3 \end{matrix}$$

(15)

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

det A? avant le changement

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

Non

det A? après l'échange de deux lignes et deux colonnes

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$* \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3+1 \\ 2 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4-6 = 6-8 = -2$$

Prop 4 ~~Un déterminant change de signe si l'on effectue un nombre impair de permutations (si par exemple, on permute deux lignes uniques ou deux colonnes uniques)~~ ~~exame~~

Prop 5 ~~Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants : $\det(A \times B) = \det A \times \det B = \det(BA)$~~

Prop 6 ~~Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments de sa diagonale.~~

Exp

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

(16)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Rq: Pour calculer un déterminant, on essaie souvent d'amener à faire apparaître sur une ligne (ou une colonne) un maximum d'éléments nuls, ce qui permet ensuite de développer plus facilement par rapport à cette ligne ou cette colonne.

IV.4 : Inversion d'une matrice par la méthode des cofacteurs

Def: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n)$.

Soit A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j .

On appelle cofacteur de a_{ij} le nombre:

$$[C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})] \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

On appelle comatrice ou matrice des cofacteurs de A la matrice:

$$[C(A) = (C_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}]$$

Théorème $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Alors

(17)

1) A est inversible ssi $\det A \neq 0$.

2) Si A est inversible ; alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C(A) \text{ et } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = -18 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible

* La matrice de A ?

$$C(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$${}^t C(A) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C(A) = \frac{-1}{18} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{+5}{18} & -\frac{1}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{7}{18} & \frac{+5}{18} & -\frac{1}{18} \\ \frac{+1}{18} & -\frac{7}{18} & \frac{+5}{18} \end{pmatrix}$$

Th

Si A est inversible, alors ${}^t A$ est inversible ;
et donc : $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$.

€ exam