

I - Introduction

Def. On appelle système d'équations linéaires tout système (S) composé de m équations à n inconnues devant être vérifiées simultanément et dont l'écriture matricielle est de la forme suivante :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \leftarrow \text{Forme linéaire}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{Forme matricielle}$$

$$\Leftrightarrow [A \cdot X = B] \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

où a_{ij} et b_{ij} sont des nombres réels donnés et B est le vecteur du second membre.

Si $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on dit que S est un système homogène.
Les solutions de (S) est tout vecteur X dont les composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ vérifient simultanément les m équations de S .

Def. Si $m=n$ et A est inversible ($\det A \neq 0$), alors (2) (S') est un système de Cramer.

Propriété: Si (S') est un système de Cramer, il admet une solution unique.

II. Résolution des systèmes de Cramer

II.1. Méthode de Cramer (ou méthode des déterminants)

Principe: Si $\det A \neq 0$, alors (S') admet une seule solution:

$$[x_i = \frac{\Delta_i}{\det(A)} ; \forall i]$$

avec Δ_i est le déterminant de A en remplaçant la i^{e} colonne par les éléments du second membre.

Exemple: $(S') : \begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

$$(S') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3$, alors:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = 2$$

$$\text{Alors } \mathcal{S} = \{ (3, -3, 2) \}$$

III-2. Méthode d'élimination de Gauss: ③

Elle consiste d'abord à mettre le système (S) sous la forme triangulaire supérieure ou inférieure, puis la solution du système est obtenue par une substitution des variables en partant de la valeur de x_n jusqu'à la valeur x_1 . Il s'agit d'éliminer une ou plusieurs variables par des combinaisons linéaires des équations.

Exemple: Soit $(S) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = b$$

$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow (S)$ est un système de Cramer et admet une solution unique.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ -3x_2 - x_3 = -5 \\ -2x_2 - x_3 = -4 \end{cases} \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{L_1}{2}) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ -3x_2 - x_3 = -5 \\ -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \end{cases} \begin{matrix} (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Alors, $y = \{(-1, 1, 2)\}$.

II.3 Méthode d'inversion des matrices (ou méthode matricielle)

$$A \cdot X = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b \quad (\text{si } A \text{ est inversible})$$

Exemple:

$$(S) = \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = b.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{Système de Cramer}$$

$$C_{\text{m}} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t C_{\text{m}} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot b \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad \text{est la solution de } (S).$$

III - Rang d'une matrice

(5)

Definition: Soit $A \in M(n, p)$. On appelle le rang de A l'ordre de la plus grande matrice carrée inversible extraite de A . On le note $\text{rg}(A)$.

- Le rang de la matrice nulle est égale à 0.
- Si $A \in M(n, p) \neq 0$, alors $1 \leq \text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Étapes du calcul du $\text{rg}(A)$

- $A \in M(n, p)$ et $m = \min(n, p) \Rightarrow 1 \leq \text{rg}(A) \leq m$
- On cherche si $\text{rg}(A) = m$
 - si on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre $m \Rightarrow \text{rg}(A) = m$.
- Si non ; $1 \leq \text{rg}(A) < m$
 - On cherche si $\text{rg}(A) = m-1$.
 - si on peut extraire de A une matrice carrée inversible d'ordre $m-1$, alors $\text{rg}(A) = m-1$
 - Si non, $\text{rg}(A) \leq m-2$
- On continue les mêmes étapes jusqu'à l'obtention d'une matrice carrée inversible d'ordre r extrait de A . On conclut alors que $[\text{rg}(A) = r]$.

Exemple: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (6)

On a: $1 \leq \text{rg}(B) \leq 4$

Ben la seule matrice carrée d'ordre 4 extraite de B.

$\det B = 0 \Rightarrow 1 \leq \text{rg}(B) < 4$

Soit: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ extraite de B (on choisit: C_1, C_3 et C_4 L_2, L_3 et L_4)

$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$

IV. Cas général: $m \neq n$ et systèmes non Cramériens

On considère le système suivant à m équations et n inconnues

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A \cdot X = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$