

Examen d'Algèbre (1 heure)

Nom et Prenom :

Note :

Numro d'examen :

Date de naissance :

Exercice 1 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer : $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. En déduire : ${}^t B \times {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer : $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

$$A^2 - 3A = -2I \Leftrightarrow \frac{-1}{2} (A^2 - 3A) = I \Leftrightarrow A \left(\underbrace{\frac{-1}{2} (A - 3I)}_B \right) = I$$

$$A \times B = B \times A = I \Leftrightarrow A \text{ est inversible et } [A^{-1} = B]$$

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer : $\det A = 14$ $\text{Com} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 14 & -7 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1. Calculer le déterminant de la matrice suivante : $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

2. En déduire le rang de C.

Exercice 5 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 6x + y + z = -4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que ce système est de Cramer.

$$(S) \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

det $A = -2 \neq 0$, alors (S) est de Cramer

2. Résoudre ce système par la méthode d'élimination de Gauss.