

Examen d'Algèbre (1 heure)

Nom et Prénom :
Numéro d'examen :
Num apogée :

Date de naissance :
Ville d'examen :
Note :

N.B : Pour les calculs, donner directement les résultats sans justifier.

Exercice 1 : Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculer quand c'est possible :

1. $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 8 & -7 & -6 \end{pmatrix}$ $A \times C = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. ${}^t B \times {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -7 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ ${}^t C \times {}^t B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer : $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $3A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Dédire de la question précédente que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

$$A^2 - 3A = 2I \Leftrightarrow A(A - 3I) = 2I$$

$$\Leftrightarrow A \left(\frac{1}{2}(A - 3I) \right) = I$$

$A \times B = B \times A = I$, alors $\overset{B}{[A^{-1} = B = \frac{1}{2}(A - 3I)]}$

Exercice 3 : Soient a, b et c des réels quelconques, calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

Exercice 4 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer :

$$\begin{aligned} 1. \det A &= -4 & \text{Com} A &= \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} & A^{-1} &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ 2. \det B &= -1 & \text{Com} B &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} & B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Reque: A^{-1} peut aussi s'écrire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$