

Exercice 1.

$$1. (S) \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = -9 \neq 0$, alors (S) est de Cramer et admet une seule solution.

$$2. x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = 0$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-9} = 0$$

Exercice 2.

$$① (S) \Leftrightarrow A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$② \det A = -3 \neq 0 \Rightarrow (S) \text{ est de Cramer}$$

$$③ x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = 1$$

Suite de l'exercice 2

$$\textcircled{4} \text{ Com } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com } A = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} :$$

$$\text{Alors; } X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors; } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow (S)$ est de Cramer.

$$x = \frac{\Delta_x}{\det A} = 0$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det A} = 0$$

$$z = 1$$

$$t = 0$$

Exercice 4:

$$(S) \Leftrightarrow A \cdot X = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 - 1$$

1^{er} cas: $t \neq 1$ et $t \neq -1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t/(t+1) \\ 1/(t+1) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t+1} \right) / t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2^{es} cas: $t = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y} = \left\{ (x, 1-x) / x \in \mathbb{R} \right\}.$$

3^{es} cas: $t = -1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \emptyset$$

Exercice 5.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t & -2 \\ 3 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B$$

$\det A = t^2 + 6 \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ ($t^2 + 6$ est positif supérieur strictement à 6)

Alors, (S) admet une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t + 2}{t^2 + 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} t & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{t^2 + 6} = \frac{t - 3}{t^2 + 6}$$

Exercice 6.

$$(S'_2) : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$(S'_2)' : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -3y + 13z = -9 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1)$$

$$(S'_2)'' : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ \frac{3}{2}z = -9 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1)$$

On commence par résoudre l'équation (3) du système $(S'_2)''$, puis on remplace dans l'équation (2) pour trouver y , puis enfin, on remplace dans l'équation (1). Donc :

$$y = \{-34, -20, -6\}.$$

Exercice 7

$$1. \det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 10 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1) \\ (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \end{matrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -2(14 - 5) = -18 \neq 0$$

Alors $\text{rg}(A) = 3$ (Vous pouvez calculer le $\det A$ directement sans changement de colonnes).

$$2. \det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 15 & 10 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (C_3 \leftarrow C_3 + C_2) \\ (C_1 \leftarrow C_1 + C_2) \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Alors $\text{rg}(B) < 3$.

$$\text{Or, } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0.$$

Alors $\text{rg}(B) = 2$.

$$3. \det(C) = 0 \quad (L_3 = L_1 - L_2).$$

Alors $\text{rg}(C) < 3$.

$$\text{On a : } \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [\text{rg}(C) = 1]$$

Exercice 7 (suite)

* On a $1 \leq \text{rg}(F) \leq 3$, et comme $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 29 \neq 0$
alors $\text{rg}(F) = 3$.

* On a $1 \leq \text{rg}(G) \leq 3$. Et nous avons :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

(remarque: On a: $C_3 = C_1 + C_2$, alors
tous les déterminants d'ordre 3 extraits de A sont nuls)

or; $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\text{rg}(G) = 2$.

Exercice 8 :

1. $(S_1) \Leftrightarrow A \cdot X = B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) \leq 3.$$

$$\text{Soit } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

Donc; Δ est le déterminant principal.

x_1, x_2 et x_3 sont les inconnus principaux et x_4 et x_5 sont les paramètres.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 + x_5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2x_4 + x_5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

On détermine x_1, x_2 et x_3 en fonction de x_4 et x_5 par la méthode d'élimination de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 + x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2x_4 - 3x_5 \end{cases} \quad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 + x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ 2x_3 = 2x_4 - x_5 \end{cases} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 = -x_5 \\ x_3 = x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left(-2x_4 + \frac{1}{2}x_5, -x_5, x_4 - \frac{1}{2}x_5 \right) / x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 8 (Suite)

$$(P_2) \Leftrightarrow A \cdot X = b$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Toutes les matrices extraites de A d'ordre 3 sont de déterminant nul.

Abs, on calcule $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Donc $\text{rg}(A) = 2$

Donc, les équations (1) et (2) sont des équations principales et les variables x_1 et x_2 sont des inconnues principales.

$$(P_1) \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 - 2x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 = 3 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases}$$

On remplace x_1 et x_2 dans les équations (3) et (4).

L'équation (3) n'est pas satisfaite or (4) ne l'est plus.

Donc, les équations principales 3 et 4 sont non compatibles simultanément avec les équations principales (1) et (2).

Abs $[Y = \emptyset]$.