

TD1 (Algèbre S2)
(Matrices et Déterminants)

Exercice 1 : On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$ si cela est possible.
2. Calculer ${}^t B \times {}^t A$. Comment peut on vérifier ce calcul ?

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice B telle que $A = 2I_3 + B$.
2. Calculer B^2, B^3 et B^4 .

Exercice 3 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. vérifier la relation $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 4 :

Soit la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer J^2 et en déduire que la matrice J est inversible (on exprimera J^{-1} en fonction de J).

Exercice 5 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} (a, b, c \in \mathbb{R}) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Utiliser les propriétés des matrices pour calculer facilement les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 56372 & 56472 \\ 29413 & 29513 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

Mettre les déterminants des matrices suivantes sous la forme triangulaire supérieure ou inférieure et calculer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :

Déterminer l'inverse des matrices suivantes par la méthode des cofacteurs :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$