
Algèbre (TD2)
(Résolution des systèmes linéaires)

Exercice 1 :

Soit le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer si le système (S) a une solution unique.
2. Résoudre ce système par la méthode de Cramer.

Exercice 2 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $A.X = b$.
2. Vérifier que le système est de Cramer.
3. Résoudre le système (S) par la méthode de Cramer.
4. Résoudre ce système par la méthode d'inversion des matrices.

Exercice 3 : On considère le système linéaire :

$$(S) \begin{cases} x + z + 2t = 1 \\ x + y = 0 \\ 4y + z + 2t = 1 \\ x + t = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $A.X = b$.
2. Vérifier que le système est de Cramer.
3. Résoudre le système (S) par la méthode des déterminants.

Exercice 4 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2y = t \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode d'inversion des matrices suivant la valeur de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) \begin{cases} tx - 2y = 1 \\ 3x + ty = 1 \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode de cramer suivant la valeur de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Résoudre les systèmes suivants par la méthode d'élimination de Gauss :

$$(S1) \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 8 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} ; (S2) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

Exercice 7 :

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -13 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -13 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2. F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(S1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} ; (S2) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \\ -4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases}$$

1. Déterminer $\text{rg}(A)$ où A est la matrice associée à chaque système.
2. Résoudre (S1) et (S2).