

Université Mohamed Premier
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales d'Oujda

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Chapitre 3 : Les indices statistiques

Première année sciences économiques et gestion

Semestre 1

Année Universitaire :
2021-2022

Plan de l'exposé

1.	Introduction.....	3
2.	Les indices simples de prix et de volume	5
2.1	Indice simple de prix.....	6
2.2	Indice simple de volume.....	7
2.3	Propriétés des indices simples	8
2.4	Taux de croissance.....	9
2.5	Moyenne des indices	12
2.6	Application.....	14
3.	Les indices synthétiques.....	18
3.1	Exemple d'utilisation	18
3.2	Indices synthétiques de prix	20
3.3	Indices synthétiques de volumes	22

1. Introduction

Pour résumer les données d'une activité économique, par exemple, les données sur l'activité commerciale, le coût de la vie ou l'emploi, les économistes vont simplifier ces données en les résumant sous forme d'indices faciles à comprendre. Ces indices vont jouer le rôle d'indicateurs de la santé du secteur économique observé.

Un indice peut être considéré comme une mesure statistique, on parlera ainsi d'indice statistique.

Quand il s'agit de grandeurs issues du domaine de l'économie et de la gestion on peut parler d'indice économique, on peut le considérer comme une mesure macroéconomique qui sera utilisé ultérieurement par des analystes pour comprendre l'activité ou les opportunités économiques actuelles et futures.

Les indicateurs économiques sont fournis souvent sous forme de série chronologique et parmi les applications de cette série est l'étude des cycles économiques.

Les indicateurs économiques comprennent divers indices et rapports, par exemple, le taux de chômage, l'indice des prix à la consommation, l'indice de production industrielle, l'indice du produit intérieur brut, l'indice des prix et variations de la masse monétaire, etc...

Les indices statistiques sont de deux types : simple ou composé. La plupart des indices économiques sont composés.

On parlera d'**indice simple** ou d'**indice élémentaire** si une seule grandeur intervient dans le calcul.

Quand plusieurs grandeurs interviennent dans le calcul, on parlera d'**indice composite** ou d'**indice synthétique**. Un indice composite peut aussi rassembler plusieurs autres indices pour résumer la situation d'un secteur économique ou peut-être mesurer la performance d'un portefeuille d'actions dans une bourse.

Les indicateurs économiques les plus utilisés proviennent des données publiées par le gouvernement et les organisations à but non lucratif ou les universités.

Au Maroc, le Haut Commissariat au Plan (HCP), qui est une institution marocaine, est le principal producteur de l'information statistique, économique, démographique et sociale au royaume. Le HCP est chargé de l'établissement des comptes de la nation.

On donne un exemple d'indice économique : l'IPIEM.

Selon le HCP, l'indice IPIEM sert à mesurer la variation des quantités produites dans les secteurs industriel, énergétique et minier.

Indice IPIEM : *Indice de la **P**roduction **I**ndustrielle, **É**nergétique et **M**inière*

L'élaboration de cet indice est fondée sur les changements qui affectent aussi bien la population des entreprises de production que la structure de la production et de la valeur ajoutée.

Le HCP publie régulièrement des notes d'actualités où on lit souvent des informations sous forme d'indices.

On donne par exemple la note publiée sur le site du HCP, qui concerne l'évolution des prix à la production (IPPIEM) de certains secteurs de l'économie, pour le mois d'octobre 2021.

*L'INDICE DES PRIX À LA PRODUCTION INDUSTRIELLE, ÉNERGÉTIQUE ET MINIÈRE DU MOIS
D'OCTOBRE 2021 (BASE 100 : 2018)*

L'indice des prix à la production du secteur des « Industries manufacturières hors raffinage de pétrole » a enregistré une hausse de 0,2% au cours du mois d'octobre 2021 par rapport au mois de septembre 2021. Cette augmentation est la résultante de :

- ➡ *la hausse de 0,9% des prix des « Industries alimentaires », de 0,2% de la « Fabrication d'autres produits minéraux non métalliques » et de l'« Industrie d'habillement » et de 0,1% dans la « Métallurgie » et dans la « Fabrication de produits métalliques, à l'exclusion des machines et des équipements »;*
- ➡ *la baisse de 1,9% des prix de la « Fabrication de produits en caoutchouc et en plastique » et de 0,2% de la « Fabrication de textiles »;*

Par ailleurs, les indices des prix à la production des secteurs des « Industries extractives », de la « Production et distribution d'électricité » et de la « Production et distribution d'eau » ont connu une stagnation au cours du mois d'octobre 2021.

Dans un autre exemple, si on veut parler des Industries alimentaires, plusieurs domaines de production peuvent être cités :

- L'industrie de la viande : abattage du bétail, de la volaille, ...

- L'industrie laitière : fabrication du lait, du beurre, des yaourts, des fromages, du lait en poudre ou concentré, ...
- L'industrie sucrière
- La fabrication de produits alimentaires élaborés : fruits, légumes, poissons, plats cuisinés et confitures
- La fabrication de produits à base de céréales : farine, pain et pâtisserie industriels, biscuits, semoules et pâtes alimentaires, ...
- La fabrication d'huiles, de corps gras et de margarines
- La fabrication de produits alimentaires divers : chocolat, confiserie, café et thé conditionnés, épices, herbes aromatiques, vinaigres, levures, ...
- La fabrication de boissons : jus de fruits et de légumes, eaux minérale ...

Alors, il est plus commode de parler d'**indice de prix des « Industries alimentaires »** et de l'augmentation ou diminution de cet indice, que de parler directement des prix des produits :

- viande rouge, ...
- lait, ...
- sucre, ...
- fruits, ...
- farine, ...
- etc ...

et de leurs taux de variations !!

2. Les indices simples de prix et de volume

Un **indice simple** est le rapport de deux valeurs représentant la même variable (grandeur), mesurées dans deux situations différentes ou dans deux périodes différentes.

$$I_{t_1/t_0} = \frac{G_1}{G_0}$$

La grandeur G peut représenter la valeur d'un prix ou la valeur d'une quantité ou toute valeur d'une variable dont l'évolution dans le temps nous intéresse, par exemple, l'évolution du chiffre d'affaire d'une entreprise au cours de l'année.

Les indices simples les plus couramment utilisés sont ceux du prix et du volume.

2.1 Indice simple de prix

Un indice simple de prix donnera la variation relative du prix entre la **période courante** et une **période de référence**.

Prenons par exemple le prix du pétrole entre deux périodes t_0 et t_1 . Le prix du baril est de $P_0 = 65.8\$$ pour la première période t_0 et son prix devient $P_1 = 71.9\$$ pour la deuxième période t_1 . L'indice simple du prix du pétrole entre les deux périodes t_0 et t_1 , en prenant t_0 comme période de référence, est

$$I_{t_1/t_0} = \frac{P_1}{P_0}$$

La période de référence est aussi appelée **période de base**.

Définition :

L'indice simple de prix à la date t (base 100 la date t_0) est :

$$I_p(t/t_0) = \frac{p(t)}{p(t_0)} = \frac{\text{Prix du bien à la date } t}{\text{Prix du bien à la date } t_0}$$

Exemple : variation du prix du carburant à la pompe

	<i>Diesel</i>	<i>Essence</i>
Octobre 2021	10.5 DH	12.1 DH
Novembre 2021	10.2 DH	12.2 DH
<i>I(Oct21/Nov21)</i>	0.9714	1.0083

Cet indice est exprimé en général en pourcentage : on multiplie par 100

	<i>Diesel</i>	<i>Essence</i>
Octobre 2021	10.5 DH	12.1 DH
Novembre 2021	10.2 DH	12.2 DH
<i>I(Oct21/Nov21)</i>	97.14	100.83

On peut parler du mois de base Octobre 2021 :

- L'indice de prix du diesel est 97.14. Le prix du diesel pour le mois de novembre 2021 a enregistré une diminution de 2.86% par rapport au mois d'octobre 2021 (base 100)
- L'indice de prix de l'essence est 100.83. Il a enregistré une légère augmentation de 0.83% par rapport au mois d'octobre 2021 (base 100)

2.2 Indice simple de volume

On parle d'indice de volume ou d'indice de quantité. Le volume peut correspondre bien à la quantité vendue seulement (volume d'activité) ou à la quantité vendue ou achetée pondérée par le prix (**chiffre d'affaire** si c'est une vente ou **dépenses** si ce sont des achats).

Définition :

L'indice simple de volume à la date t (base 100 la date t_0) est :

$$I_q(t/t_0) = \frac{q(t)}{q(t_0)} = \frac{\text{Quantité produite ou consommée durant la période } t}{\text{Quantité produite ou consommée durant la période } t_0}$$

Si le temps est supposé discret (non continue), on parlera de la $i^{\text{ème}}$ période, $i = 1, 2, \dots, n$. La première période correspondra à $i = 1$. On note

$$I_q(i/1) = \frac{q_i}{q_1}$$

La première période peut être la période précédente (antérieure)

$$I_q(i/i-1) = \frac{q_i}{q_{i-1}}$$

Exemple : consommation en électricité

Voici les consommations en électricité d'un ménage entre le mois de février et le mois d'octobre

Mois	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Sept.	Octo.
Cons. kWh	179	205	82	85	120	110	168	174	157
$I(i/i-1)$	-----	114.53	40.00	103.66	141.18	91.67	152.73	103.57	90.23
$I(i)$	100	114.53	45.81	47.49	67.04	61.45	93.85	97.21	87.71
Base 100 Février									

2.3 Propriétés des indices simples

Soit G_n la grandeur observée à la $n^{\text{ème}}$ période et n_0 correspond à la période de référence.

$$I(n/n_0) = \frac{G_n}{G_{n_0}}$$

Réversibilité

$$I(n/n_0) = \frac{1}{I(n_0/n)}$$

- Cette propriété peut être intéressante même quand la référence n'est pas une date, par exemple, on peut comparer le prix d'un produit dans deux régions différentes :

$$I_p(\text{Maroc/Espagne}) = \frac{1}{I_p(\text{Espagne/Maroc})}$$

Circularité

$$I(n/n_0) = I(n/n') * I(n'/n_0)$$

Pour toute autre période n' .

Enchaînement ou transférabilité

$$I(n/n_0) = I(n/n-1) * I(n-1/n-2) * I(n-2/n-3) * \dots * I(n_0+1/n_0)$$

Il en résulte que pour une période m , on a :

$$I(n/m) = \frac{I(n/n_0)}{I(m/n_0)}$$

Indice simple produit de grandeurs

S'il s'agit d'une grandeur qui est le produit d'autres grandeurs, par exemple le chiffre d'affaire ou les dépenses, alors l'indice simple de cette grandeur sera le produit des indices simples la constituant. Si on a,

$$G = \prod_{i=1}^k G^{(i)}$$

Alors,

$$I_G(t/t_0) = \frac{G_t}{G_{t_0}} = \frac{\prod_{i=1}^k G_t^{(i)}}{\prod_{i=1}^k G_{t_0}^{(i)}} = \prod_{i=1}^k \frac{G_t^{(i)}}{G_{t_0}^{(i)}} = \prod_{i=1}^k I_{G^{(i)}}(t/t_0)$$

Par exemple, s'il s'agit d'un chiffre d'affaire défini comme le produit de la quantité vendue et du prix par unité :

$$G = CA = P * Q$$

alors l'indice du chiffre d'affaire sera

$$I_{CA}(t/t_0) = I_p(t/t_0) * I_q(t/t_0)$$

2.4 Taux de croissance

Définition : le taux de croissance de G entre les deux périodes $(n-1, n)$ est le quotient

$$\tau_n = \frac{G_n - G_{n-1}}{G_{n-1}} = I(n/n-1) - 1$$

Remarques :

- Le taux de croissance peut être positif ou négatif.
- Si on connaît le taux de croissance τ_n entre les deux périodes $(n-1, n)$, on peut déduire l'indice entre les mêmes périodes :

$$I(n/n-1) = \tau_n + 1$$

Exemple : consommation en électricité

Calcul du taux de croissance par rapport à la période précédente:

Mois	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Sept.	Octo.
Cons. kWh	179	205	82	85	120	110	168	174	157
$I(i/i-1)$	-----	114.53	40.00	103.66	141.18	91.67	152.73	103.57	90.23
$\tau_i = I(i/i-1) - 1$	-----	14.53	-60	3.66	41.18	-8.33	52.73	3.57	-9.77

On peut toujours calculer une grandeur pour la $n^{ème}$ période en fonction de la grandeur à la première période si on connaît les différents taux de croissance précédents.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } \tau_n = \frac{G_n}{G_{n-1}} - 1 \Leftrightarrow G_n = G_{n-1} * (1 + \tau_n)$$

Ce qui donne par récurrence :

$$G_n = (1 + \tau_2) * (1 + \tau_3) * \dots * (1 + \tau_{n-1}) * (1 + \tau_n) * G_1$$

Taux de croissance moyen :

On s'intéresse à l'évolution d'une grandeur G qui passe d'une valeur G_0 observée à l'instant t_0 à une valeur G_1 observée à un autre instant t_1 , la durée entre t_0 et t_1 s'étale sur n périodes successifs, une période peut être par exemple l'année, le mois ou la journée.

On veut calculer le taux moyen d'évolution sur les n périodes, c.à.d. quel est le taux d'évolution $\bar{\tau}$, qui serait le même sur chacune des n périodes et qui va nous permettre de passer de la valeur G_0 à la valeur G_1 .

Prenons par exemple trois périodes consécutives i , $i + 1$ et $i + 2$; on peut obtenir l'évolution ou la croissance d'une grandeur G , en calculant les indices $I(i + 1/i)$ et $I(i + 2/i + 1)$. Si on veut obtenir la croissance moyenne entre la période i et $i + 2$, il est plus naturel d'obtenir une moyenne géométrique des deux indices $I(i + 1/i)$ et $I(i + 2/i + 1)$. Supposons pour cela que le taux de croissance est constant entre les deux périodes i et $i + 2$, cela exprimerait une évolution moyenne entre les deux périodes. Notons $\bar{\tau}$ le taux de croissance moyen, on a,

$$G_{i+2} = (1 + \bar{\tau}) * G_{i+1} = (1 + \bar{\tau}) * (1 + \bar{\tau}) * G_i = (1 + \bar{\tau})^2 * G_i$$

Ce qui correspond à une évolution réelle observée

$$G_{i+2} = I(i + 2/i + 1) * G_{i+1} = I(i + 2/i + 1) * I(i + 1/i) * G_i$$

Ce qui donnera une moyenne géométrique des indices

$$1 + \bar{\tau} = \sqrt{I(i + 2/i + 1) * I(i + 1/i)} = (I(i + 2/i + 1) * I(i + 1/i))^{\frac{1}{2}}$$

Et on a le taux moyen qui s'écrit,

$$\bar{\tau} = (I(i + 2/i + 1) * I(i + 1/i))^{\frac{1}{2}} - 1$$

Cela peut se généraliser sur plusieurs périodes :

Sur les n indices qu'on peut calculer (période précédente base 100)

$$I(i + 1/i), \quad i = 1, \dots, n$$

La moyenne géométrique entre la première période et la dernière période est exprimée ainsi,

$$\left(\prod_{i=1}^n I(i + 1/i) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Le **taux de croissance moyen** se déduit,

$$\bar{\tau} = \left(\prod_{i=1}^n I(i + 1/i) \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Si on connaît les deux valeurs G_0 et G_1 de la grandeur G entre la première et la dernière période, on aura

$$G_1 = \left(\prod_{i=1}^n I(i + 1/i) \right) * G_0$$

Le **taux de croissance moyen** devient,

$$\bar{\tau} = \left(\frac{G_1}{G_0} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemples :

1. On présente dans le tableau suivant l'évolution du prix d'un produit A entre le premier Janvier 2020 et 31 Décembre 2020 :

Evolution des indices prix (Base 100 le mois précédent) de Janvier 2020 à Décembre 2020

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
1,52	1,76	1,51	1,12	0,95	0,88	0,85	0,95	0,98	0,78	0,78	0,90

Le nombre de période est 12

Le taux d'évolution moyen du prix du produit A entre le 1^{er} Janvier 2020 et le 31 Décembre 2020 est,

$$\bar{\tau} = (1.52 * 1.76 * 1.51 * ... * 0.78 * 0.90)^{\frac{1}{12}} - 1 = 4.20\%$$

Le prix du produit A a augmenté de 4.20% entre Janvier 2020 et Décembre 2020.

2. On connaît que le volume d'activité d'une entreprise est passé de 254 unités produites en 2018 à 1586 unités produites en 2021. Calculons le taux d'évolution moyen annuel du volume d'activité entre 2018 et 2021.

La valeur du volume d'activité est connue pour les deux années 2018 et 2021, le nombre de périodes qui s'étale entre ces deux dates est : $2021 - 2018 = 3$.

Le taux de croissance moyen annuel entre 2018 et 2021 sera,

$$\bar{\tau} = \left(\frac{1586}{254} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1,8414 - 1 = 0.8414 = 84.14\%$$

Le volume d'activité de l'entreprise a connu une augmentation moyenne de 84.14% entre les années 2018 et 2021.

3. Les charges dues à la téléphonie dans une société de service ont connu des changements entre Février 2015 et Avril 2016. En effet, en Février 2015 les charges étaient de 4000 DH, en Avril 2016 les charges ont reculé à 2400 DH. Calculons le taux de croissance moyen mensuel des charges dues à la télécommunication entre Février 2015 et Avril 2016.

Pour calculer le nombre de période, on distingue 12 périodes entre Février 2015 et Février 2016 puis on rajoute les deux périodes entre Février 2016 et Avril 2016. Au total il y a 14 périodes.

Le taux de croissance moyen mensuel entre Février 2015 et Avril 2016 est,

$$\bar{r} = \left(\frac{2400}{4000} \right)^{\frac{1}{14}} - 1 = 0,9642 - 1 = -0,0358 = -3.58\%$$

Les charges dues à la téléphonie dans la société ont reculé de 3.58% entre Février 2015 et Avril 2016.

4. Le chiffre d'affaire d'une grande entreprise a triplé entre 2016 et 2020, calculons le taux de croissance moyen annuel du chiffre d'affaire de cette entreprise.

Les chiffres d'affaires pour les deux années sont inconnus, posons CA_{2016} et CA_{2020} les deux valeurs inconnues. On connaît que le chiffre d'affaire a triplé entre 2016 et 2020, c'est à dire que $CA_{2020} = 3 * CA_{2016}$. On peut calculer ainsi le rapport,

$$\frac{CA_{2020}}{CA_{2016}} = 3$$

Le nombre de période est $2020 - 2016 = 4$.

Le taux de croissance moyen annuel de l'entreprise entre 2016 et 2020 est,

$$\bar{r} = (3)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1,31607 - 1 = 0,3161 = 31.61\%$$

Le chiffre d'affaire de l'entreprise a progressé de 31.61% entre 2016 et 2020.

2.5 Moyenne des indices

On peut citer le calcul de la moyenne arithmétique, géométrique et harmonique.

Pour la moyenne arithmétique, elle peut correspondre à une moyenne simple ou à une moyenne pondérée. L'exemple de l'indice de Laspeyres correspond à une moyenne pondérée et l'exemple

de l'indice Paasche correspond à une moyenne harmonique. Tandis que l'indice de Fisher correspond à une moyenne géométrique.

Indice des moyennes :

Prenons n valeurs de G observées à l'instant t et n valeurs de G observées à l'instant t_0 ,

t	$G_{t,1}$	$G_{t,2}$		$G_{t,n}$
t_0	$G_{t_0,1}$	$G_{t_0,2}$		$G_{t_0,n}$

La grandeur G peut être le prix ou la quantité et les n valeurs de G seront les prix de plusieurs produits ou les quantités consommées de ces produits.

On peut définir l'indice des moyennes comme l'indice simple de la moyenne :

$$I_G = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{t,i}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_{t_0,i}} = \frac{\sum_{i=1}^n G_{t,i}}{\sum_{i=1}^n G_{t_0,i}}$$

Moyenne des indices :

Le calcul de l'indice de la moyenne révèle qu'une grande variation d'une seule valeur de la grandeur G , par exemple une quantité consommée $G_{t,i} = q_{t,i}$ pour le $i^{\text{ème}}$ produit entre t et t_0 , va se répercuter directement sur l'indice calculé.

On peut proposer pour remédier à cela, la moyenne arithmétique des indices,

$$I_{\bar{G}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{G_{t,i}}{G_{t_0,i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_G(t/t_0)$$

Remarque :

La moyenne arithmétique des indices sera utilisée si les n valeurs observées de G ont même importance, la pondération est la même partout, cela est équivalent à une pondération égale à 1. Dans la réalité, on préfère une moyenne pondérée qui est bien plus équilibrée (on verra l'exemple de la moyenne de Laspeyres) ou une moyenne géométrique qui est plus insensible aux fluctuations des valeurs des indices, cette dernière est préconisée pour le calcul des indices boursiers.

2.6 Application

Les indices élémentaires du prix moyen d'un produit P sur le marché de gros, base 100 l'année précédente, sont les suivants pour les années 1976 à 1980

1976	1977	1978	1979	1980
220.0	170.0	63.5	96.8	90.9

1. Calculons pour chacune des années 1976 à 1980, l'indice élémentaire du prix de produit P dans les cas suivants :

- En prenant 1975 comme date de référence.
- En prenant la période des trois années 1975-1977 comme date de référence.

→ **En prenant 1975 comme date de référence :**

La propriété de transférabilité s'écrit :

$$I(n/n_0) = I(n/n-1) * I(n-1/n-2) * I(n-2/n-3) * \dots * I(n_0+1/n_0)$$

Ici $n_0 = 1975$ alors on obtient les résultats suivants :

$$I(76/75) = 2.200$$

$$I(77/75) = I(77/76) * I(76/75) = 1.700 * 2.200 = 3.740$$

$$I(78/75) = I(78/77) * I(77/76) * I(76/75) = 0.635 * 1.700 * 2.200 = 2.375$$

$$\begin{aligned} I(79/75) &= I(79/78) * I(78/77) * I(77/76) * I(76/75) \\ &= 0.968 * 0.635 * 1.700 * 2.200 = 2.299 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(80/75) &= I(80/79) * I(79/78) * I(78/77) * I(77/76) * I(76/75) \\ &= 0.909 * 0.968 * 0.635 * 1.700 * 2.200 = 2.0897 \end{aligned}$$

On obtient alors les indices élémentaires suivants base 100 en 1975

1975	1976	1977	1978	1979	1980
100	220.0	374.0	237.49	229.9	208.97

→ En prenant la période des trois années 1975-1977 comme date de référence :

D'après la propriété de circularité des indices élémentaires, on peut écrire :

$$I(t/75) = I(t/75 - 77) * I(75 - 77/75)$$

ce qui donne

$$I(t/75 - 77) = \frac{I(t/75)}{I(75 - 77/75)}$$

L'indice élémentaire du prix moyen du quintal de produit P pour la période 75 à 77 est, en prenant l'année 75 pour référence :

$$\begin{aligned} I(75 - 77/75) &= \frac{\text{prix moyen de la période } 75 - 77}{\text{prix pour la période } 75} = \frac{\frac{\text{prix}(75) + \text{prix}(76) + \text{prix}(77)}{3}}{p(75)} \\ &= \frac{1}{3} * \frac{\text{prix}(75) + \text{prix}(76) + \text{prix}(77)}{p(75)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{prix}(75)}{p(75)} + \frac{\text{prix}(76)}{p(75)} + \frac{\text{prix}(77)}{p(75)} \right\} \\ &= \frac{I(75/75) + I(76/75) + I(77/75)}{3} = \frac{1.00 + 2.20 + 3.74}{3} = 2.3133 \end{aligned}$$

$$I(75 - 77/75) = 2.3133$$

d'où, on a les résultats :

$$I(75/75 - 77) = \frac{1}{2.3131} = 0.432$$

$$I(76/75 - 77) = \frac{2.20}{2.3131} = 0.951$$

$$I(77/75 - 77) = \frac{3.74}{2.3131} = 1.617$$

.....

On obtient les indices élémentaires suivants, base 100 en 1975-1977 :

1975	1976	1977	1978	1979	1980
43.2	95.1	161.7	102.7	99.4	90.3

2. En 1977 le prix moyen du quintal de produit P a été de 2960.0 DH.

a. En déduire le prix moyen du quintal pour les autres années.

b. A partir des résultats. Vérifier les valeurs trouvées précédemment pour l'indice élémentaire du prix de produit P base 100 en 1975-1977.

→ **Calculons le prix moyen pour les autres années :**

D'après la définition des indices élémentaires :

$$I(t/t_0) = \frac{p(t)}{p(t_0)}$$

D'où pour 1977, on a :

$$I(77/75) = \frac{2960.0}{p(75)} = 3.74$$

Ce qui donne le prix pour 1975 :

$$p(75) = \frac{2960.0}{3.74} = 791.44$$

$$I(t/75) = \frac{p(t)}{p(75)} \Rightarrow p(t) = p(75) * I(t/75)$$

A.N.

$$p(76) = p(75) * I(76/75) = 791.44 * 2.20 = 1741.2$$

$$p(78) = p(75) * I(78/75) = 791.44 * 2.375 = 1879.7$$

.....

On obtient les prix moyens suivants (en DH par quintal)

1975	1976	1977	1978	1979	1980
791.4	1741.2	2960.0	1879.7	1819.5	1654.1

→ Vérifions les valeurs trouvées précédemment pour l'indice élémentaire du prix de produit *P* base 100 en 1975-1977 :

Le prix moyen du quintal de produit *P* pour la période 75-77 :

$$\bar{p}_{75-77} = \frac{791.4 + 1741.2 + 2960.0}{3} = 1830.9 \text{ DH}$$

D'où le calcul des indices élémentaires, base 100 en 75-77 :

$$I(75/75 - 77) = \frac{p(75)}{\bar{p}_{75-77}} * 100 = \frac{791.4}{1830.9} * 100 = 43.2$$

$$I(76/75 - 77) = \frac{p(76)}{\bar{p}_{75-77}} * 100 = \frac{1741.2}{1830.9} * 100 = 95.1$$

.....

Ainsi on retrouve les mêmes résultats calculés dans la question 1. b.

1975	1976	1977	1978	1979	1980
43.2	95.1	161.7	102.7	99.4	90.3

3. Les indices synthétiques

3.1 Exemple d'utilisation

Utilisation dans le monde, exemple des pays de l'OCDE

OCDE : **O**rganisation de **C**oopération et de **D**éveloppement **É**conomique

Elle regroupe actuellement 38 pays :

- ✓ les pays de l'Europe occidentale
- ✓ l'Amérique du nord, le Japon, l'Australie,
- ✓ la Nouvelle-Zélande, la Corée
- ✓ quelques pays d'Europe centrale : République tchèque, Hongrie, Pologne
- ✓ la Turquie, le Chili, la Slovaquie, Israël, Estonie, la Colombie, et le Costa Rica

L'OCDE est le principal rassembleur de statistiques sur les pays développés. Son siège est à Paris.

Pays	Costa Rica	Colombie	Lituanie	Lettonie	Estonie	Israël	Slovénie	Chili	République slovaque
Date	25/05/2021	28/04/2020	05/07/2018	01/07/2016	09/12/2010	07/09/2010	21/07/2010	07/05/2010	14/12/2000
.....									
Pays	Corée	Pologne	Hongrie	République tchèque	Mexique	Nouvelle- Zélande	Australie	Finlande	Japon
Date	12/12/1996	22/11/1996	07/05/1996	21/12/1995	18/05/1994	29/05/1973	07/06/1971	28/01/1969	28/04/1964
.....									
Pays	Italie	Luxembourg	Pays-Bas	Autriche	Suède	Suisse	Allemagne	Grèce	Belgique
Date	29/03/1962	07/12/1961	13/11/1961	29/09/1961	28/09/1961	28/09/1961	27/09/1961	27/09/1961	13/09/1961
.....									
Pays	Irlande	France	Portugal	Espagne	Turquie	Norvège	Islande	Danemark	Royaume- Uni
Date	17/08/1961	07/08/1961	04/08/1961	03/08/1961	02/08/1961	04/07/1961	05/06/1961	30/05/1961	02/05/1961
.....									
Pays	États-Unis	Canada							
Date	12/04/1961	10/04/1961							

On donne par exemple la méthodologie utilisée pour calculer l'indice de prix à la consommation.

Tableau 7. Prix à la consommation : agrégation des indices

	Agrégats élémentaires	Agrégats de niveau supérieur
Canada	Moyenne géométrique + ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres modifiée
Mexique	Moyenne des rapports de prix pondérée	Formule de Laspeyres standard
États-Unis	Moyenne géométrique + moyenne des rapports de prix pondérée	Formule de Laspeyres modifiée
Australie	Moyenne géométrique + ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres modifiée
Japon	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Corée	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Nouvelle-Zélande	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Autriche	Moyenne des rapports de prix + ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Belgique	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
République tchèque	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres modifiée
Danemark	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres standard
Finlande	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres standard
France	Moyenne géométrique + ratio des prix moyens pour l'alimentation	Formule de Laspeyres en version chaînée
Allemagne	..	Formule de Laspeyres standard
Grèce	..	Formule de Laspeyres standard
Hongrie	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres chaînée
Islande	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres standard
Irlande	Ratio des prix moyens pondéré	Formule de Laspeyres modifiée
Italie	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres chaînée
Luxembourg	..	Formule de Laspeyres standard
Pays-Bas	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Norvège	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres en version chaînée
Pologne	Moyenne géométrique	Formule de Laspeyres en version chaînée
Portugal	Moyenne géométrique + moyenne des rapports de prix	Formule de Laspeyres standard
République slovaque	Ratio des prix moyens pondéré	Formule de Laspeyres standard
Espagne	Moyenne des rapports de prix	Formule de Laspeyres standard
Suède	Moyenne géométrique	Indice-chaîne
Suisse	Moyenne des rapports de prix	Formule de Laspeyres standard
Turquie	Ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard
Royaume-Uni	Moyenne de rapports + ratio des prix moyens	Formule de Laspeyres standard

.. : Métadonnées non disponibles

1

¹ PRINCIPAUX INDICATEURS ÉCONOMIQUES, ANALYSE MÉTHODOLOGIQUE COMPARATIVE : INDICES DES PRIX À LA CONSOMMATION ET DES PRIX À LA PRODUCTION, Supplément 2, OCDE-2002

3.2 Indices synthétiques de prix

Indice de prix de Laspeyres

Pour obtenir l'indice de prix de Laspeyres, on suppose que les quantités consommées pour la période courante sont les mêmes consommées pour la période de référence. On pondère ensuite les prix par les quantités consommées et on calcule l'indice des moyennes,

$$L_p(n/n_0) = \frac{\text{prix de la période } n \text{ pondérés par les quantités de la période } n_0}{\text{prix de la période } n_0 \text{ pondérés par les quantités de la période } n_0}$$

$$L_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K p_n^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}$$

Si on introduit dans cette formule les indices des prix, on pose les indices simples suivants :

$$I_p^{(i)}(n/n_0) = \frac{p_n^{(i)}}{p_{n_0}^{(i)}}$$

On obtient une moyenne arithmétique pondérée des indices simples, les pondérations ici sont les chiffres d'affaires (ou dépenses) réalisés à la période de référence :

$$L_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K I_p^{(i)}(n/n_0) * p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}$$

Remarque :

Le produit $p * q$ entre le prix p et la quantité q a comme interprétation soit « le chiffre d'affaire » réalisé par la vente d'un bien en quantité q avec un prix de vente unitaire p , soit une interprétation comme les charges ou les dépenses effectuées en consommant un bien ou une matière première en quantité q avec un prix d'achat unitaire p .

On peut calculer l'indice de prix de Laspeyres si on connaît les indices simples des prix et seulement les pourcentages des chiffres d'affaires pour chaque produit qui sont réalisés à la date de référence.

$$L_p(n/n_0) = \sum_{i=1}^K I_p^{(i)}(n/n_0) * f_{n_0}^{(i)}$$

Avec $f_{n_0}^{(i)}$ le pourcentage du chiffre d'affaire réalisé par le $i^{\text{ème}}$ produit à la date de référence n_0 .

$$f_{n_0}^{(i)} = \frac{p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}$$

Indice de prix de Paasche

Pour cet indice, les quantités consommées sont celles de la période courante. On calcule l'indice des moyennes en pondérant les prix par les quantités consommées à la période courante,

$$P_p(n/n_0) = \frac{\text{prix de la période } n \text{ pondérés par les quantités de la période } n}{\text{prix de la période } n_0 \text{ pondérés par les quantités de la période } n}$$

$$P_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_{n_0}^{(i)} * q_n^{(i)}}$$

Introduisant maintenant dans la formule ci-dessus, les indices simples des prix, on obtient une moyenne harmonique des indices simples. La moyenne harmonique considérée ici est une moyenne pondérée² par les chiffres d'affaires réalisés à la période courante:

$$P_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_n^{(i)} * q_n^{(i)} / I_p^{(i)}(n/n_0)}$$

Cette formule peut être reformulé en considérant seulement les pourcentages

$$P_p(n/n_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^K \left(f_n^{(i)} / I_p^{(i)}(n/n_0) \right)}$$

Avec $f_n^{(i)}$ le pourcentage du chiffre d'affaire réalisé par le $i^{\text{ème}}$ produit à la date de référence n .

$$f_n^{(i)} = \frac{p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^K p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}$$

Un troisième indice qui va profiter de l'indice de Laspeyres et de l'indice de Paasche pour atténuer leur différence est l'indice de Fisher.

² On rappelle qu'une moyenne harmonique pondérée des valeurs $(x_i, w_i); i = 1, 2, \dots, n$, les w_i étant les poids de la série des données, est fournie par la formule suivante $H = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n w_i / x_i} = 1 / \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} * \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i} \right)$

Indice de prix de Fisher

Cet indice est la moyenne géométrique entre l'indice de Laspeyres et l'indice de Paasche,

$$F_p(n/n_0) = \sqrt{L_p(n/n_0) * P_p(n/n_0)}$$

3.3 Indices synthétiques de volumes

Le même principe appliqué pour l'indice de prix des trois indices synthétiques évoqués ci-dessus, est appliqué pour l'indice synthétique de volume, celui de Laspeyres, Paasche et Fisher. Pour l'indice de volume de Laspeyres, les prix pour la période courante sont les mêmes prix pour la période de référence. On pondère ensuite les volumes par les prix et on calcule l'indice des moyennes,

Indice de volume de Laspeyres

$$L_q(n/n_0) = \frac{\text{quantités de la période } n \text{ valorisées au prix de la période } n_0}{\text{quantités de la période } n_0 \text{ valorisées au prix de la période } n_0}$$

$$L_q(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K q_n^{(i)} * p_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^K q_{n_0}^{(i)} * p_{n_0}^{(i)}}$$

Introduisant maintenant les indices simples des quantités, on obtient une moyenne des indices des quantités pondérées par le chiffre d'affaire à la période de référence,

$$L_q(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K I_q^{(i)}(n/n_0) * q_{n_0}^{(i)} * p_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^K q_{n_0}^{(i)} * p_{n_0}^{(i)}}$$

Cette formule peut être réécrite de la façon suivante :

$$L_q(n/n_0) = \sum_{i=1}^K I_q^{(i)}(n/n_0) * f_{n_0}^{(i)}$$

Avec $f_{n_0}^{(i)}$ le pourcentage du chiffre d'affaire réalisé par le $i^{\text{ème}}$ produit à la date de référence n_0 .

Indice de volume de Paasche

Ici on pondère les volumes par les prix de la période courante,

$$L_q(n/n_0) = \frac{\text{quantités de la période } n \text{ valorisées au prix de la période } n}{\text{quantités de la période } n_0 \text{ valorisées au prix de la période } n}$$

$$P_q(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K q_n^{(i)} * p_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^K q_{n_0}^{(i)} * p_n^{(i)}}$$

Si on introduit les indices simples des quantités, on obtient une moyenne harmonique pondérée, les pondérations correspondent aux chiffres d'affaires réalisés à la période courante :

$$P_q(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^K q_n^{(i)} * p_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^K q_n^{(i)} * p_n^{(i)} / I_q^{(i)}(n/n_0)}$$

On réécrit cette formule en introduisant les pourcentages $f_n^{(i)}$

$$P_q(n/n_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^K \left(f_n^{(i)} / I_q^{(i)}(n/n_0) \right)}$$

Avec $f_n^{(i)}$ le pourcentage du chiffre d'affaire réalisé par le $i^{\text{ème}}$ produit à la date de référence n .

Indice de volume de Fisher

Comme dans le cas de l'indice de prix de Fisher, on prendra la moyenne géométrique entre l'indice de volume de Laspeyres et l'indice de volume de Paasche,

$$F_q(n/n_0) = \sqrt{L_q(n/n_0) * P_q(n/n_0)}$$

Exemple 1

Dans cet exemple, on relève pendant trois années consécutives, les différents prix et les différentes quantités consommées pour trois articles,

Articles	Année	Prix			Quantités		
		2004	2005	2006	2004	2005	2006
	A	30	40	45	100	120	150
	B	5	6	6	20	30	50
	C	40	50	45	10	20	30

Calculons l'indice de volume de Laspeyres $L_q(2006/2004)$, on aura :

$$L_q(2006/2004) = \frac{150 * 30 + 50 * 5 + 30 * 40}{100 * 30 + 20 * 5 + 10 * 40} = \frac{5950}{3500} = 1.7$$

Il y a une augmentation de 70% des quantités consommées en 2006 par rapport à 2004 base 100.

Si on calcule les indices simples des quantités, les dépenses liées à chaque article et les pourcentages de dépenses de chaque article, on obtient le tableau suivant,

Articles	A	B	C
$I_q^{(i)}(2006/2004)$	1.5	2.5	3
$q_{2004}^{(i)} * p_{2004}^{(i)}$	3000	100	400
$f_{2004}^{(i)}$	85.71%	2.86%	11.43%

On peut refaire le calcul en utilisant la formule utilisant la moyenne pondérée. Les pondérations peuvent soit être soit les dépenses par article, soit les pourcentages des dépenses.

$$L_q(2006/2004) = \frac{\sum_{i=1}^3 I_q^{(i)}(2006/2004) * q_{2004}^{(i)} * p_{2004}^{(i)}}{\sum_{i=1}^3 q_{2004}^{(i)} * p_{2004}^{(i)}} = \frac{1.5 * 3000 + 2.5 * 100 + 3 * 400}{3500} = \frac{5950}{3500} = 1.7$$

Pour la formule utilisant les fréquences $f_{2004}^{(i)}$, on aura

$$\begin{aligned}
 L_q(2006/2004) &= \sum_{i=1}^3 I_q^{(i)}(2006/2004) * f_{2004}^{(i)} \\
 &= 1.5 * 85.71\% + 2.5 * 2.86\% + 3 * 11.43\% \\
 &= 1.7
 \end{aligned}$$

Si on calcule les autres indices on trouvera :

$$\text{Indice de volume de Paasche} \quad P_q(2006/2004) = 1.657$$

$$\text{Indice de volume de Fisher} \quad F_q(2006/2004) = 1.678$$

Pour les indices de prix

$$\text{Indice de prix de Laspeyres} \quad L_p(2006/2004) = 1.449$$

$$\text{Indice de prix de Paasche} \quad P_p(2006/2004) = 1.412$$

$$\text{Indice de prix de Fisher} \quad F_p(2006/2004) = 1.43$$

Exemple2

La valeur globale d'un panier alimentaire est constituée de 70% des légumes & fruits et de 30% des viandes. Supposant que le prix des viandes a connu une augmentation de 15% et que le prix des légumes & fruits a baissé de 20%. Calculons l'indice synthétique Paasche prix du panier.

$$P_p(n/n_0) = \frac{\text{prix de la période } n \text{ pondérés par les quantités de la période } n}{\text{prix de la période } n_0 \text{ pondérés par les quantités de la période } n}$$

$$P_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^2 p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 p_{n_0}^{(i)} * q_n^{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^2 p_n^{(i)} * q_n^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 p_n^{(i)} * q_n^{(i)} / I_p^{(i)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^2 \left(1 / I_p^{(i)} \right) * \left(p_n^{(i)} * q_n^{(i)} / \sum_{i=1}^2 p_n^{(i)} * q_n^{(i)} \right)}$$

A.N.

$$P_p(n/n_0) = \frac{1}{(1/0.80) * 0.70 + (1/1.15) * 0.30} = 0.8804 = 88.04\%$$

Le prix du panier a diminué de 11.96%.

Exemple3

Un portefeuille est constitué de 40% d'une Action A et de 60% d'une action B. Sachant que le prix de l'action A a augmenté de 5% et le prix de l'action B a diminué de 4%, calculez l'indice de Laspeyres prix du portefeuille :

$$L_p(n/n_0) = \frac{\text{prix de la période } n \text{ pondéré par les quantités de la période } n_0}{\text{prix de la période } n_0 \text{ pondéré par les quantités de la période } n_0}$$

$$L_p(n/n_0) = \frac{\sum_{i=1}^2 p_n^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^2 I_p^{(i)}(n/n_0) * p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}} = \sum_{i=1}^2 I_p^{(i)}(n/n_0) * \left(\frac{p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}}{\sum_{i=1}^2 p_{n_0}^{(i)} * q_{n_0}^{(i)}} \right)$$

A.N.

$$L_p(n/n_0) = 1.05 * 0.4 + 0.96 * 0.6 = 0.996 = 99.6\%$$

On observe une diminution du prix du portefeuille de $0.004 = 0.4\%$

Fin chapitre 3