
Correction Feuille de T.D

(Les tests d'hypothèses paramétriques)

Correction Exercice1

1) Le tribunal a le choix entre deux hypothèses :

H_0 : "Le prévenu est innocent"

H_1 : " Le prévenu est coupable"

On place comme hypothèse initiale qu'on conserve à priori l'hypothèse de l'innocence du prévenu, car si on a pas suffisamment d'éléments de culpabilité c'est cette hypothèse qui sera appliquée.

2) Le tribunal est face à deux risques :

Le premier est de déclarer innocent un coupable.

Le deuxième est de déclarer coupable un innocent.

Le risque le plus grave est de déclarer coupable un innocent.

3) Le risque de première espèce est le risque de rejeter à tort H_0 . Dans notre exemple c'est de déclarer coupable un innocent.

Le risque de 2ème espèce est le risque d'accepter à tort H_0 , ceci revient à déclarer innocent un coupable.

Dans ce qui suit, et comme il a été signalé dans le cours , les étapes suivantes qui se résumement comme suit sont à suivre pour résoudre un problème de Test.

1)Formuler les hypothèses du Test, en veillant à ce que l'hypothèse H_0 soit toujours avec un signe =, ou $\leq$, ou $\geq$

2)Déterminer la statistique du Test et le risque d'erreur, en veillant à connaître le comportement limite (loi Limite) de cette statistique sous H_0 .

3) Déterminer la règle de décision en se basant sur le signe de l'hypothèse H_1 , ça permet de déterminer la zone du rejet de H_0 .

4) Calculer la valeur observée de la statistique du test, la comparer avec le quantile de la loi limite.

5) Conclure sur la décision à prendre H_0 ou H_1 , et finir par une conclusion concrète sur le problème du test posé

Correction Exercice2

NB : Dans tous les exercices traités, on se place toujours dans les conditions d'un échantillon de loi normale

1) Il s'agit de réaliser un test bilatéral :

$$H_0 : \mu = 100.$$

$$H_1 : \mu \neq 100.$$

On considère la statistique du test $\bar{X}$.

Par le CLT, $\bar{X}$ suit une loi normale $\hookrightarrow \mathcal{N}(E(\bar{X}), V(\bar{X})) = \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

On a la règle de décision suivante :

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \in [\mu_0 - d_\alpha, \mu_0 + d_\alpha]$.

On rejette H_0 si $\bar{X} \notin [\mu_0 - d_\alpha, \mu_0 + d_\alpha]$.

Avec $d_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}$ où $\varphi_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la loi normale tel que $P(\mathcal{N}(0, 1) > \varphi_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

c.a.d $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \varphi_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varphi_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (à lire sur la table de la loi normale pour $\alpha = 5\%$.)

On adopte finalement la règle de décision suivante :

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \in [\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}]$.

On rejette H_0 si $\bar{X} \notin [\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}]$.

Ici $\mu_0 = 100$, $\sigma = 4$ et $\bar{X} = 103$ $\varphi_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1.96$ d'après la table de la loi normale avec $\alpha = 5\%$.

En réalisant le calcul, on trouve l'intervalle $[97.52; 102.47]$.

Or $\bar{X} = 103 \notin [97.52 - 102.47]$, donc on décide H_1 et on rejette H_0 .

Conclusion : La durée de vie sur l'emballage n'est pas correcte.

2) Il s'agit de réaliser un test unilatéral à droite :

$$H_0 : \mu = 100$$

$$H_1 : \mu > 100.$$

On utilise la même statistique du Test, la seule chose qui va changer est la règle de décision qui est formulée comme suit :

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \leq c_\alpha$.

On rejette H_0 si $\bar{X} > c_\alpha$.

Avec $c_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha$.

On a φ_α est tel que $P(\mathcal{N}(0, 1) > \varphi_\alpha) = \alpha \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \varphi_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \varphi_\alpha = Z_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale, et pour $\alpha = 5\%$ et en regardant la table on a $Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1,65$.

On a $\bar{X} = 103$ et $c_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha = 100 + \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot 1.65 = 102.08$ On a $\bar{X} = 103 > 102.08 \Rightarrow$ on rejette H_0 .

Conclusion : La durée de vie réelle est supérieure à celle sur l'emballage.

Correction Exercice3

1) On fait un test de :

$$H_0 : \mu \leq 50 \text{ contre}$$

$$H_1 : \mu > 50.$$

On se place dans les conditions d'un échantillon de loi normale avec σ connu=5 et $\alpha = 5\%$.

Soit la statistique du test $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

sous H_0 c.a.d lorsque $\mu = 50$, $T = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

En se référant à l'hypothèse H_1 , la règle de décision est comme sui :

On rejette H_0 (on accepte H_1) si $T > c_\alpha$.

On ne rejette pas H_0 (on accepte H_0) si $T \leq c_\alpha$.

Avec $P(\mathcal{N}(0, 1) > c_\alpha = \alpha \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq c_\alpha = 1 - \alpha)$.

Pour $\alpha = 5\%$, le coefficient c_α , est le quantile de la loi normale $Z_{0,95} = 1,65$ par lecture de la table de la loi normale.

On a d'après les données $\bar{X} = 54,1$, $n = 9$, $\sigma = 5$

$$T_{obs} = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{54,1 - 50}{\frac{5}{3}} = 2,46.$$

On remarque bien que $T_{obs} = 2,46 > c_\alpha = 1,65$ on rejette donc H_0 .

Conclusion : La réglementation n'est pas respectée.

2) σ inconnu.

Puisqu'on se place dans le cas de σ inconnu, il faut l'estimer par $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

On utilise donc la statistique $T = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - 50}{\frac{S}{3}}$.

On sait que sous H_0 pour $\mu = 50$, $T \hookrightarrow T_8$, et que T est plus grande sous H_1 que sous H_0 .
on décide donc :

On ne rejette pas H_0 si $T > c_\alpha$.

On rejette H_0 si $T \leq c_\alpha$.

Avec $P_{\mu=50}(T > c_\alpha) = P(T_8 > c_\alpha) \Rightarrow P(T_8 < c_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$, en regardant sur la table de la loi de student avec $\alpha = 5\%$, on trouve que $c_\alpha = t_{8,0.975} = 1.860$ le quantile de la loi de Student à 8 degrés de liberté.

On a $S^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (X_i - 54.1)^2 = 21.88 \Rightarrow S = 4.678$.

$$\text{Donc, } T_{obs} = \frac{54.1 - 50}{\frac{4.678}{3}} = 2.629.$$

On a $T_{obs} = 2,629 > c_\alpha = t_{8,0.975} = 1.8601 \Rightarrow$ on ne rejette H_0 et $\mu > 50$.

Conclusion : La réglementation n'est respectée au terme statistique avec un risque $\alpha = 5\%$.

2)a) Réalisons pour μ inconnue le test suivant :

$H_0 : \sigma \leq 5$

$H_1 : \sigma > 5$

Comme μ est inconnue on va utiliser S^2 comme un estimateur de σ^2 .

$$\text{On a } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$\text{Posons la statistique du test } Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

On sait que sous H_0 pour $\sigma = \sigma_0 = 5$ on a $Z \hookrightarrow \chi_{n-1}^2 = \chi_8^2$, et Z prend de plus grandes valeurs sous H_1 que sous H_0 (car S^2 estime σ^2 et σ^2 grand sous $H_1 \Rightarrow S^2$ grand sous H_1).

Donc la règle de décision sera de la forme :

On rejette H_0 (accepte H_1) si $Z > k_\alpha$,

On ne rejette pas H_0 (on accepte H_0) si $Z \leq k_\alpha$.

Avec $\alpha = P_{\sigma=\sigma_0}(Z > k_\alpha) = P(\chi_{n-1}^2 > k_\alpha) \Rightarrow P(\chi_{n-1}^2 < k_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow k_\alpha = \chi_{n-1, 1-\alpha}^2 \Rightarrow k_\alpha = \chi_{8,0.95}^2$.

C'est le quantile de la loi de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté, qu'on lira sur la table on trouve cette valeur est égale $\chi_{8,0.95}^2 = 15,507$.

$$\text{On a } Z_{obs} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{8S^2}{5^2} = \frac{8 \times 21,88}{25} \cong 7$$

On a $Z_{obs} = 7 < k_\alpha = 15,507$, donc on ne rejette pas H_0 .

Conclusion : La précision de la technique du dosage utilisée reste inférieure ou égale à 5 ($\sigma \leq 5$) au terme de l'analyse statistique au risque $\alpha = 5\%$.

2)b) $H_0 : \sigma = 5$,

$H_1 : \sigma \neq 5$

rien ne va changer on utilise la même statistique du test Z de la question précédente, la seule chose qui va changer est la règle de décision qui sera formulée comme suit :

On ne rejette pas H_0 si $Z \in [a_\alpha, b_\alpha]$.

On rejette H_0 si $Z \notin [a_\alpha, b_\alpha]$.

Avec $P(\chi_9^2 < a_\alpha) = P(\chi_9^2 > b_\alpha) = \frac{\alpha}{2} = 2.5\%$.

Autrement dit : $a_\alpha = \chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{8; \frac{\alpha}{2}}^2 = 2,180$

et $b_\alpha = \chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{8; 0,975}^2 = 16,919$.

On a $Z_{obs} = 7 \in [a_\alpha, b_\alpha] = [2,180 - 17,535]$, On accepte donc H_0 .

Conclusion : La précision du dosage est égale à 5 $\sigma = 5$.

Correction Exercice 4

Il s'agit de réaliser un test bilatéral :

On est en présence d'un échantillon de grande taille avec les hypothèses suivantes ;

$H_0 : p \leq 0.05$

$H_1 : p > 0.05$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ est un échantillon de $b(p)$.

On considère la statistique $\bar{X}$ qui avec n assez grand et en utilisant le Théorème CLT, et le fait que $\bar{X}$ est un estimateur sans biais de p on a alors :

$$\bar{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \frac{\bar{X}-0.05}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

En posant $T = \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}}}$, on remarque que T a le même comportement que $\bar{X}$

On rejette H_0 si $T > c_\alpha$:

On ne rejette pas H_0 si $T \leq c_\alpha$.

Avec $(P(\mathcal{N}(0,1) > c_\alpha) = 1 - \alpha)$ et donc $c_\alpha = Z_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale pour $\alpha = 5\%$ en regardant la table de la loi normale $Z_{0,95} = 1,65$.

$$\text{On a } \bar{X} = \frac{7}{100} = 0,07 \text{ et } T_{obs} = \frac{\bar{X} - 0.05}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}}} = \frac{0,02.10}{\sqrt{0,070,93}} = 0.784.$$

Comme $T = 0,784 < c_\alpha = 1,65$, on ne rejette pas H_0 et $p \leq 0,05$.

Conclusion : L'entreprise n'accepte pas le lot de pièce.

Correction Exercice 5

Pour la formulation d'hypothèse et comme il a été expliqué dans le cours, l'hypothèse H_1 sera toujours celle qui répond à la question posée. Ici on veut savoir si la popularité du parti est-elle à la hausse ?

Il s'agit d'un test unilatéral formulée ainsi.

$H_0 : p = 0,42$

$H_1 : p > 0.42$.

On pose la statistique du Test $T = \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{1041}}}$,

sous H_0 , $p = p_0 = 0,42$ la statistique $T \frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{1041}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ avec $\bar{X}$ un estimateur de p .

On a T a tendance à être plus grand sous H_1 que sous H_0 et par suite la règle de décision sera la suivante ;

On rejette H_0 si $T > c_\alpha$:

On ne rejette pas H_0 si $T \leq c_\alpha$.

Avec $(P(\mathcal{N}(0, 1) > c_\alpha) = 1 - \alpha)$ et donc $c_\alpha = Z_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale pour $\alpha = 5\%$ en regardant la table de la loi normale $Z_{0,95} = 1,65$.

on a $\bar{X} = \frac{458}{1041} = 0,44$.

$$T_{obs} = \frac{0,44 - 0,42}{\sqrt{\frac{0,44(1-0,44)}{1041}}} = \frac{0,02}{0,0153} = 1,3072.$$

Comme $T = 1,3072 < c_\alpha = 1,65$, on ne rejette pas H_0

Conclusion : L'affirmation n'est pas justifiée statistiquement et le chef de parti a tort de déclarer que la popularité de son parti est en hausse.