

Table des matières

0.1	Notion de test	1
0.1.1	Formalisme des tests statistiques	2
0.1.2	Définitions	3
0.1.3	Méthode de construction d'un test	4
0.2	Test de l'espérance et de la variance	4
0.2.1	Population Normale	4
0.2.2	Cas de $\theta = \mu, \sigma^2$ connue	5
	Bibliographie	6

Notions sur les tests

Introduction

La notion de tests d'hypothèses est très importante en statistique, c'est le complément à l'estimation statistique : après avoir obtenu une approximation du paramètre qu'on a estimé, il est essentiel de le comparer à des standards (comme une moyenne, une variance ou une proportion). Ce type de test est appelé **Test paramétrique**. Le principe est de diviser toutes les possibilités en deux catégories, l'hypothèse nulle notée H_0 et l'alternative, notée H_1 .

C'est le test statistique qui permet, sur la base des observations, de décider en faveur de l'hypothèse la plus raisonnable : H_0 ou H_1 .

Le test statistique est une façon de faire une comparaison éclairée sur la base de l'observation d'un échantillon. Le tout étant basé sur la théorie des probabilités, il ne sera pas possible de savoir si la décision prise à la suite d'un test d'hypothèse est la bonne mais il est cependant possible de contrôler certaines des erreurs et de les maintenir à des taux acceptables dans le contexte.

En cela, les tests d'hypothèses ne prouvent jamais rien mais ils permettent de comparer objectivement des possibilités.

Cette notion sur les tests va nous permettre d'avoir un bagage théorique dans le but de réaliser des tests dans le cours des modèles linéaires en semestre S6 pour les étudiants option Économie et gestion, et aussi on l'utilise dans l'étude de la qualité pour les options de Gestion.

On est souvent amené à tester la validité d'une hypothèse émise sur une population à partir d'un échantillon extrait de celle-ci. On va traiter le cas des moyennes, des variance et on finira par les tests des proportions.

0.1 Notion de test

Nous introduisons tout d'abord un exemple pour comprendre ce qui est un test.

Exemple : Un industriel veut tester une nouvelle machine qu'on lui propose pour

la fabrication de ses produits.

X = nombre de produits manufacturés fabriqués par la machine en heure.

X suit une loi normale d'espérance $E(X)$ et de variance $\sigma^2 : X \hookrightarrow N(\theta, \sigma^2)$

$E(X) = \theta$: mesure la performance moyenne de la machine, θ est un paramètre inconnu.

σ^2 : est un paramètre connu et mesure les variations possibles de la performance de la machine d'une fois à l'autre, ici $\sigma^2 = 25$ par exemple.

Pour des raisons de rentabilité, notre entrepreneur n'investira dans cette machine que si θ est significativement supérieur à 100.

Il réalise 9 essais de la machine pour déterminer si $\theta > 100$, on dispose d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_9)$ de X , comme pour l'intervalle de confiance on utilise une loi limite tabulée autour de $\bar{X}$:

D'après le Théorème central limite (CLT) $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^9 X_i}{9} \hookrightarrow \mathcal{N}(E(\bar{X}), V(\bar{X})) = \mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{9}) = \mathcal{N}(\theta, \frac{25}{9})$.

Faire un test ici, consiste à choisir entre 2 hypothèses à l'aide de $\bar{X}$.

$H_0 : \theta \leq 100$ n'achète pas la machine.

$H_1 : \theta > 100$ achète la machine.

Si $\bar{X}$ est plus grand on achète la machine, on accepte H_1 (on rejette H_0)

Si $\bar{X}$ est plus petit on n'achète pas la machine, on accepte H_0 (On ne rejette pas H_0).

A l'aide de la loi de $\bar{X}$, il faudra décider a priori d'un nombre k tel que :

$\bar{X} > k \Rightarrow$ on accepte H_1 (on rejette H_0).

$\bar{X} \leq k \Rightarrow$ on accepte H_0 (on ne rejette pas H_0).

0.1.1 Formalisme des tests statistiques

Soit X une v.a de loi P_θ dépendant d'un paramètre réel inconnu $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. On dispose d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de X . Un problème de test se pose lorsqu'on veut choisir entre deux hypothèses :

$H_0 : \theta \in \Theta_0$

$H_1 : \theta \in \Theta_1$

Avec $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ et $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$.

(Dans notre exemple $\Theta = \mathbb{R}^+$, $\Theta_0 = [0, 100]$, $\Theta_1 = [100, +\infty[$.)

Résoudre ce problème du test consiste à déterminer une règle qui permettra, au vu de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la loi P_θ de choisir entre deux décisions suivantes :

(1) accepter H_0 c.a.d admettre que $\theta \in \Theta_0$

(2) accepter H_1 c.a.d admettre que $\theta \in \Theta_1$

En général, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ interviendra au travers une statistique $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

On devra déterminer une partition de $\mathbb{R}$ en deux parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{R}$ dites zones d'acceptation et de rejet de H_0 . Plus précisément $\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$.

Si $T \in \mathcal{A}$, on accepte H_0

Si $T \in \mathcal{R}$, on rejette H_0 et donc on accepte H_1 .

Dans notre exemple $T = \bar{X}$, $\mathcal{A} =]-\infty, k]$ et $\mathcal{R} =]k, +\infty]$.

Si $\bar{X} \in]-\infty, k]$ on accepte H_0 .

Si $\bar{X} \in]k, +\infty]$ on accepte H_1 .

Définition 0.1. La région du rejet du test de H_0 contre H_1 , notée $\mathcal{R}$ correspond à la plage des valeurs des réalisations de la statistique de test pour laquelle on rejettera H_0 .

Donc si $T(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}$, on rejette H_0 et on accepte H_1 .

Si au contraire $T(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{A}$, on accepte H_0 .

Résoudre le problème de test consiste donc maintenant à déterminer les régions $\mathcal{A}$, et $\mathcal{R}$ (c.a.d dans notre exemple à calculer k). On verra que ceci dépend de H_0 , de la statistique du test T , et du niveau α du test que l'on définira plus loin.

On définit alors :

0.1.2 Définitions

Chaque règle de décision comporte un risque d'erreur. On ne sait pas quel est le vrai état de la nature (on ne sait pas si c'est H_0 ou H_1 qui est vraie); mais on va prendre une décision de rejet ou de non rejet sur la base d'information issues d'une expérience aléatoire (le tirage de l'échantillon qui va donc nécessairement la population mère).

En appliquant notre règle, il y a deux façons de se tromper.

Définition 0.2. : L'erreur de 1ère espèce consiste à choisir H_1 (rejeter H_0 alors que H_0 est vraie).

L'erreur de 2ème espèce consiste à choisir H_0 alors que H_1 est vraie.

Exemple 0.1. Dans notre exemple de l'introduction.

L'erreur de 1ère espèce consiste à acheter la machine alors qu'elle n'est pas rentable.

L'erreur de 2ème espèce consiste à ne pas acheter la machine alors qu'elle est rentable.

Définition 0.3. On appelle *risque de 1ère espèce* la probabilité de rejeter à tort H_0 , pour $\theta \in \Theta_0 = P_\theta(\text{choisir } H_1 | H_0 \text{ est vraie}) = P(T(X) \in \mathcal{R} | \theta \in \Theta_0)$.
On appelle niveau du test, la probabilité maximale de rejeter à tort H_0 .

Définition 0.4. On appelle *risque de 2ème espèce* noté β la probabilité de rejeter à tort H_1 , pour $\theta \in \Theta_0 = P_\theta(\text{choisir } H_0 | H_1 \text{ est vraie}) = P(T(X) \in \mathcal{A} | \theta \in \Theta_1)$.

0.1.3 Méthode de construction d'un test

On peut résumer la méthode de construction d'un test par :

- 1) On choisit les hypothèses H_0 et H_1 , en veillant particulièrement au choix de H_0 . On fixe le niveau α du test.
- 2) On choisit une v.a. $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, dont on connaît la loi sous H_0 et qui a un comportement différent sous H_1 .
- 3) On détermine la règle de décision (c.a.d les régions $\mathcal{A}_\alpha$, et $\mathcal{R}_\alpha$).
 - Si $T \in \mathcal{A}_\alpha$, on accepte H_0 (on ne rejette pas H_0).
 - Si $T \in \mathcal{R}_\alpha$, on accepte H_1 . (on rejette H_0) $\mathcal{R}_\alpha$ est déterminée à l'aide de $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(T \in \mathcal{R}_\alpha)$.
- 4) Calcul de T_{obs} et comparaison avec $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{R}_\alpha$, et prendre une décision finale concrète.

0.2 Test de l'espérance et de la variance

Le test sur une moyenne permet de comparer une moyenne à une norme déjà établie. La notion de moyenne étant relativement bien connue, et utilisée dans plusieurs cas pratiques, ce test est très fréquent. Il faut distinguer deux contextes ; lorsque le caractère d'intérêt est de distribution normale (test exact) et lorsque le caractère n'est pas distribué normalement mais que la taille de l'échantillon est relativement grande (test approximatif).

0.2.1 Population Normale

Le terme population normale veut dire que la variable mesurée est distribuée selon une loi normale ou du moins selon une distribution qui est très semblable.

0.2.2 Cas de $\theta = \mu, \sigma^2$ connue

On se place dans les conditions d'une population normale, et soit un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de X , de loi normale $N(\theta, \sigma^2)$.

On va essayer de réaliser un ensemble de tests en suivant la méthodologie citée ci-dessus.

On veut tester la moyenne μ , au niveau $\alpha \in]0, 1[$ fixé, pour σ^2 connue.

Les hypothèses à confronter sont données par :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{ou} \quad \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Ce type de test est appelé test unilatéral.

On utilisera la variable statistique $T = \bar{X}$ pour effectuer le test.

Rappelons que $\bar{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

D'après les hypothèses confrontées $\bar{X}$ a tendance à être plus grand sous H_1 que sous H_0 . Donc, on va accepter H_1 pour $\bar{X}$ grand, et H_0 sinon.

Plus précisément, il faudra déterminer une constante c_α telle que :

On rejette H_0 si $\bar{X} > c_\alpha$.

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \leq c_\alpha$.

On détermine c_α à l'aide du niveau α du test préalablement fixé par l'expérimentateur (supposons par exemple que $\alpha = 5\%$) et de la loi de $\bar{X}$.

$$P_{H_0}(\bar{X} > c_\alpha) = P_{H_0}\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{c_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{c_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}).$$

on pose $\varphi_\alpha = \frac{c_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ par la table de la loi normale :

φ_α est tel que $\alpha = P(\mathcal{N}(0, 1) > \varphi_\alpha) \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \varphi_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow \varphi_\alpha = z_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale de coefficient de sécurité α .

$$\text{Donc, } c_\alpha = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha.$$

Règle de décision :

On rejette H_0 si $\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha$.

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha$.

On pose la statistique $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

On peut aussi formuler la règle de décision comme suit :

Règle de décision :

On rejette H_0 si $T > \varphi_\alpha$.

On ne rejette pas H_0 si $T \leq \varphi_\alpha$.

Remarque 0.1. Le test de $H_0 : \mu \leq \mu_0$ contre $H_1 : \mu > \mu_0$, σ connu donne le même résultat, en effet seule compte le fait que H_1 est à droite de H_0 pour $\bar{X}$.

Exemple 0.2. On reprend l'exemple de l'industriel il dispose d'un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_9)$ est un échantillon de X de loi $N(\mu, 25)$. On suppose qu'il observe : 98-99-101-113-112-112-111-109-108.

Il fait le test au niveau $\alpha = 5\%$, de $H_0 : \mu \leq 100$ contre $H_1 : \mu > 100$, pour $\sigma = 5$ connu.

On a donc $\mu_0 = 100$, $n = 9$ et $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \varphi_\alpha) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow \varphi_\alpha = z_{1-\alpha} = 1,65$ (voir la table de la loi Normale).

On rejette H_0 si $\bar{X} > 100 + \frac{5}{3}1.65 = 102.75$.

On ne rejette pas H_0 si $\bar{X} \leq 100 + \frac{5}{3}1.65 = 102.75$.

Ici $\bar{X} = \frac{98 + 99 + \dots + 108}{9} = 107$, d'où on rejette H_0 et on accepte H_1 car $\bar{X} = 107 > 102.75$.

Conclusion (Concrète) : L'industriel achète la machine.