

Table des matières

0.0.1	Cas de $\theta = \mu, \sigma^2$ inconnue	2
-------	--	---

Notions sur les tests : Test sur les moyennes

Test de $H_0 : \mu \geq \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0, \sigma$ connu.

Les hypothèses à confronter sont données par :

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

Ce type de test est appelé test unilatéral à gauche.

$\bar{X}$ a tendance à être plus petit sous H_1 que sous H_0 , d'où il faut déterminer une constante c_α telle que :

On accepte H_0 si $\bar{X} \geq c_\alpha$.

On accepte H_1 si $\bar{X} < c_\alpha$.

Avec $\alpha = \sup(P_{H_0}(\bar{X} \geq c_\alpha) = (P_{\mu \geq \mu_0}(\bar{X} \geq c_\alpha) = P(\mathcal{N}(0, 1) \geq \frac{c_\alpha - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(\mathcal{N}(0, 1) >$

$$\frac{\mu_0 - c_\alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ c.a.d que } \varphi_\alpha = \frac{\mu_0 - c_\alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow c_\alpha = \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha.$$

Autrement dit $P(\mathcal{N}(0, 1) > \varphi_\alpha) = \alpha \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \varphi_\alpha = 1 - \alpha) \Rightarrow \varphi_\alpha = Z_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale.

Le test devient :

$\begin{aligned} \text{On accepte } H_0 & \text{ si } \bar{X} \geq \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha. \\ \text{On accepte } H_1 & \text{ si } \bar{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_\alpha. \end{aligned}$

Test bilatéral de $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0, \sigma$ connu.

Les hypothèses à confronter sont données par :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Ce type de test est appelé test bilatéral :

Pour accepter H_0 , $\bar{X}$ ne doit être ni trop petit, ni trop grand.

On accepte H_0 pour $|\bar{X} - \mu_0| \leq d_\alpha$ par symétrie de la loi normale.

c.a.d pour $\bar{X} \in [\mu_0 - d_\alpha, \mu_0 + d_\alpha]$ et H_1 pour $\bar{X} \notin [\mu_0 - d_\alpha, \mu_0 + d_\alpha]$.

$$\frac{\alpha}{2} = P_{\mu=\mu_0}(\bar{X} > \mu_0 + d_\alpha) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{d_\alpha}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right).$$

$$\text{c.a.d que } \varphi_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{d_\alpha}{\sigma} \sqrt{n} \Rightarrow d_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varphi_{\frac{\alpha}{2}}.$$

La valeur de $\varphi_{\frac{\alpha}{2}}$ est telle que $P(\mathcal{N}(0,1) > \varphi_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(\mathcal{N}(0,1) \leq \varphi_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \varphi_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile de la loi normale. Donc, on choisit :

$\begin{aligned} H_0 & \text{ pour } \bar{X} \in \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_{\frac{\alpha}{2}}; \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_{\frac{\alpha}{2}}\right]. \\ H_1 & \text{ pour } \bar{X} \notin \left[\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_{\frac{\alpha}{2}}; \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_{\frac{\alpha}{2}}\right]. \end{aligned}$

Dans notre exemple $\mu_0 = 100$, $\varphi_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ et $d_\alpha = \frac{5}{3} \cdot 1.96 = 3.25$.

Donc, on accepte H_0 pour $\bar{X} \in [96.75; 103.25]$.

Donc, on accepte H_1 pour $\bar{X} \notin [96.75; 103.25]$.

Comme $\bar{X} = 107 \Rightarrow H_1$.

0.0.1 Cas de $\theta = \mu, \sigma^2$ inconnue

Pour les intervalles de confiance, on utilisait la v.a $\frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow T_{n-1}$. On va

s'en inspirer ici. Je rappelle qu'on utilise $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2$ comme étant un estimateur de σ^2 car la variance étant inconnue.

Test de : $H_0 : \mu \leq \mu_0$ **ou** $\mu = \mu_0$ **contre** $H_1 : \mu > \mu_0$, σ **inconnu**.

On va poser $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ **Faites bien attention c'est μ_0 et non pas μ .**

$\bar{X}$ est plus grand sous H_1 que sous H_0 donc il en est de même pour T .

D'où le test :

On accepte H_0 si $T \leq c_\alpha$. On accepte H_1 si $T > c_\alpha$.

Avec $\alpha = \sup(P_{H_0}(\bar{X}) > c_\alpha) = (P_{\mu=\mu_0}(T > c_\alpha))$.

Comme $\frac{T - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \hookrightarrow T_{n-1}$ si $\mu = \mu_0$, donc $\alpha = P(T_{n-1} > c_\alpha) \Rightarrow c_\alpha = t_{n-1;\alpha}$ c'est le

quantile de la loi de student a $n - 1$ degrés de libertés et de coefficient α .

D'où le test :

On accepte H_0 si $T \leq t_{n-1; \alpha}$.
 On accepte H_1 si $T > t_{n-1; \alpha}$.

Dans notre exemple $\bar{X} = 107$, $S^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (X_i - 107)^2 = \frac{288}{8} = 36$.

$\alpha = 5\% \Rightarrow t_{8; \alpha} = 1.860$ (voir la table de la loi de student).

On accepte H_0 si $T \leq 1.860$.

On accepte H_1 si $T > 1.860$.

$$T_{obs} = \frac{107 - 100}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{107 - 100}{\frac{6}{3}} = \frac{7}{2} = 3.5, \text{ d'où } H_1, \text{ on achète la machine.}$$

Test de : $H_0 : \mu \geq \mu_0$ ou $(\mu = \mu_0)$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$, σ inconnu.

$\bar{X}$ est plus grand sous H_0 que sous H_1 donc il en est de même pour T .

D'où le test :

On accepte H_0 si $T \geq c_\alpha$.

On accepte H_1 si $T < c_\alpha$.

Avec $\alpha = \sup(P_{H_0}(\bar{X}) < c_\alpha) = (P_{\mu=\mu_0}(T < c_\alpha) = P(T_{n-1} < c_\alpha))$.

c_α est ici négatif par symétrie.

$\alpha = P(T_{n-1} > -c_\alpha)$ c.a.d que $-c_\alpha = t_{n-1; \alpha}$. D'où le test est finalement :

On accepte H_0 si $T \geq -t_{n-1; \alpha}$.
 On accepte H_1 si $T < -t_{n-1; \alpha}$.

Notre exemple :

On accepte H_0 si $T \geq -1.860$.

On accepte H_1 si $T < -1.860$.

$$T_{obs} = \frac{107 - 100}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{107 - 100}{\frac{6}{3}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ d'où } H_0 \mu \geq 100.$$

Test bilatéral de $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$ σ inconnu.

On accepte H_0 si $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ n'est ni trop petit, ni trop grand.

$\Rightarrow$ on accepte H_0 pour $|T| \leq d_\alpha$ c.a.d pour $T \in [-d_\alpha, d_\alpha]$.

On accepte H_1 pour $T \notin [-d_\alpha, d_\alpha]$.

Avec $\alpha = P_{\mu=\mu_0}(T \notin [-d_\alpha, d_\alpha]) = P(T_{n-1} \notin [-d_\alpha, d_\alpha])$ c.a.d que $\frac{\alpha}{2} = P(T_{n-1} > d_\alpha) \Rightarrow d_\alpha = t_{n-1; \frac{\alpha}{2}}$.

On accepte H_0 si $T \in [-t_{n-1}; \frac{\alpha}{2}; t_{n-1}; \frac{\alpha}{2}]$. On accepte H_1 si $T \notin [-t_{n-1}; \frac{\alpha}{2}; t_{n-1}; \frac{\alpha}{2}]$.
--