

0.1 Test sur la variance

0.1.1 Cas de $\theta = \sigma^2, \mu$ inconnue ou pas

Pour les intervalles de confiance de σ^2 , on a utilisé deux estimateurs de la variance :

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ pour } \mu \text{ inconnue.}$$

$$\widehat{\sigma'^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ pour } \mu \text{ connue.}$$

On va faire de même ici pour les tests. Nous considérons d'abord le cas μ inconnue le plus (courant), en indiquant brièvement ce qu'il faut changer si μ connue.

Test de : $H_0 : \sigma = \sigma_0$ **ou** $\sigma \leq \sigma_0$ **contre**
 $H_1 : \sigma > \sigma_0, \mu$ **inconnue.**

Comme μ est inconnue on va utiliser S^2 comme un estimateur de σ^2 .

$$\text{On a } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$\text{Posons la statistique du test } Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

On sait que $Z \hookrightarrow \chi_{n-1}^2$ pour $\sigma = \sigma_0$, et Z prend de plus grandes valeurs sous H_1 que sous H_0 (car S^2 estime σ^2 et σ^2 grand sous $H_1 \Rightarrow S^2$ grand sous H_1).

Donc la règle de décision sera de la forme :

On rejette H_0 (accepte H_1) si $Z > c_\alpha$,

On ne rejette pas H_0 (on accepte H_0) si $Z \leq c_\alpha$.

$$\text{Avec } \alpha = P_{\sigma=\sigma_0}(Z > c_\alpha) = P(\chi_{n-1}^2 > c_\alpha) \Rightarrow P(\chi_{n-1}^2 < c_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow k_\alpha = \chi_{n-1, 1-\alpha}^2.$$

On accepte H_0 si $Z \leq \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$. On accepte H_1 si $Z > \chi_{n-1, 1-\alpha}^2$.

Si μ est connue toute la procédure au niveau du test ne change pas la seule chose qui change c'est la statistique du test et la valeur du quantile de la loi χ^2 .

On remplace Z par $Z' = \frac{n\widehat{\sigma'^2}}{\sigma_0^2} \hookrightarrow \chi_n^2$ pour $\sigma = \sigma_0$.

On remplace χ_{n-1}^2 par χ_n^2 , d'où le test :

On accepte H_0 si $Z' \leq \chi_{n, 1-\alpha}^2$. On accepte H_1 si $Z' > \chi_{n, 1-\alpha}^2$.

Exemple 0.1. Le cours de l'action d'une entreprise (un jour donné) est supposé suivre une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, μ est liée aux fondamentaux de l'entreprise (et de l'économie) c'est la moyenne, σ mesure la volatilité des cours. On avait observé dans le

passé $\sigma = 3$. On note le cours de l'action 6 jours différents. 217-219-215-223-225-221.

La volatilité a-t-elle augmenté ? (Faire le test avec $\alpha = 5\%$)

NB : La question qu'on vous pose (ici la volatilité a-t-elle augmenté ?) se traduit au niveau de la formulation des hypothèses de test toujours par l'hypothèse alternative H_1

La formulation du test sera comme suit :

$H_0 : \sigma = 3$ (La volatilité n'a pas augmenté) contre :

$H_1 : \sigma > 3$ (La volatilité a augmenté).

On est dans le cas où μ est inconnue, on doit utiliser donc la statistique du test :

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{5S^2}{9}.$$

On accepte H_1 si $Z > \chi_{5, 0.95=1-0.05}^2$.

On accepte H_0 si $Z \leq \chi_{5, 0.95=1-0.05}^2$.

Ici le quantile $\chi_{5, 0.95}^2 = 11.07$ On a $\bar{X} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 X_i = 220$.

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - 220)^2 = \frac{70}{5} = 14.$$

$Z_{obs} = \frac{5}{9} \cdot 14 = 7.77 < 11.07 \Rightarrow$ on adopte l'hypothèse H_0 : La volatilité n'a pas augmenté.

Test bilatéral : $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contre $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ μ est inconnue .

Sous H_1 $Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ prend de plus petites ou de plus grandes valeurs que sous H_0 .

On a sous H_0 la statistique $Z \hookrightarrow \chi_{n-1}^2$.

La règle de décision sera donc :

On accepte H_0 (on ne rejette pas H_0 si $Z \in [a_\alpha, b_\alpha]$. On accepte H_1 (on rejette H_0, si $Z \notin [a_\alpha, b_\alpha]$.
--

Avec $\frac{\alpha}{2} = P(\chi_{n-1}^2 < a_\alpha) = P(\chi_{n-1}^2 > b_\alpha)$.

D'où $P(\chi_{n-1}^2 < a_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a_\alpha = \chi_{n-1; \frac{\alpha}{2}}^2$ et

$P(\chi_{n-1}^2 > b_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(\chi_{n-1}^2 \leq b_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow b_\alpha = \chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2$.

a_α et b_α sont les quantiles de la loi de χ_{n-1}^2 qu'on trouve sur la table .

Si μ est connue on remplace Z par $Z' = \frac{n.S^2}{\sigma_0^2}$ et χ_{n-1}^2 par χ_n^2 .

Exemple 0.2. Dans notre exemple du cours de l'action avec :

$H_0 : \sigma = 6$ contre $H_1 : \sigma \neq 6$. On a $Z = \frac{5.S^2}{36}$.

On accepte H_0 si $Z \in [a_\alpha, b_\alpha]$, et H_1 sinon.

Avec $\alpha = 5\%$ on a $2.5\% = \frac{\alpha}{2} = P(\chi_5^2 < a_\alpha) = P(\chi_5^2 > b_\alpha)$.

$\Rightarrow a_\alpha = 0.831$ et $b_\alpha = 12.833$.

Ici $Z_{obs} = \frac{5}{36} \cdot 14 \simeq 1.94 \Rightarrow$ on adopte H_0 c.a.d $\sigma = 6$.

0.2 Test d'une proportion

On a population contenant 2 types d'individus A et B. On veut tester la proportion p d'individu du type A. Pour cela, on prélève un échantillon de n individus $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ échantillon de Bernoulli $b(p)$.

$X_i = 1$ si le i ème individu est de type A.

$X_i = 0$ si le i ème individu est de type B.

p est estimé par $\bar{X}$. Si n est grand, $\bar{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(E(\bar{X}), V(\bar{X})) = \mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$ ou bien

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1). \text{ En estimant } p \text{ par } \bar{X} : , \quad \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Supposons que l'on veut tester :

$H_0 : p = p_0$ ($p \geq p_0$ contre

$H_1 : p < p_0$).

Posons $T = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}}.$

T suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ sous H_0 et T est plus grand sous H_0 que sous H_1 (car $\bar{X}$ estime p avec $p < p_0$). Donc.

On accepte H_0 si $T \geq c_\alpha$. On accepte H_1 si $T < c_\alpha$.

Avec $\alpha = \sup(P_{H_0}(\bar{X}) > c_\alpha) = (P_{p=p_0}(T < c_\alpha) = P(\mathcal{N}(0, 1)) < c_\alpha$.

c_α est donc négatif, $c_\alpha = -\varphi_\alpha$ où $\alpha = P(\mathcal{N}(0, 1) > \varphi_\alpha) \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) < \varphi_\alpha) = 1 - \alpha$

Exemple 0.3. Dans cet exemple on va traiter le cas bilatéral de la proportion.

Sur 400 naissance, on compte 205 garçons. Au niveau 5%, tester l'hypothèse selon laquelle la probabilité qu'un garçon naisse est $\frac{1}{2}$.

On veut réaliser le test :

$H_0 : p = p_0$ contre

$H_1 : p \neq p_0$.

$$1) \ n = 400 \text{ On pose } T = \frac{\bar{X} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{n}}}.$$

Sous H_0 T suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On prend H_0 si $T \in [-c_\alpha, c_\alpha]$.

On prend H_1 si $T \notin [-c_\alpha, c_\alpha]$.

Avec $\alpha = P_{p=\frac{1}{2}}(T) \notin [-c_\alpha, c_\alpha] = P(\mathcal{N}(0, 1) \notin [-c_\alpha, c_\alpha])$ c.a.d que $\frac{\alpha}{2} = P(\mathcal{N}(0, 1) > c_\alpha) \Rightarrow P(\mathcal{N}(0, 1) \leq c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. En regardant la table de la loi normale avec $\alpha = 5\%$ on a $c_\alpha = 1.96$.

$$T_{obs} = \frac{\bar{X} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{400}}} \text{ avec } \bar{X} = \frac{205}{400} = 0.512. \text{ en remplaçant dans l'expression de } T,$$

on trouve $T_{obs} = \frac{0.25}{0.49} \simeq 0.5 \Rightarrow$ on adopte $H_0, p = \frac{1}{2}$