

Professeur :D.DRIOUCHI

Examen de la session Normale :
Durée 1h.

Important : aucun document autorisé, sauf les tables statistiques

2,5 Question de cours : Donner la définition d'un estimateur et définir ses propriétés. (Biais, convergence, et risque quadratique)

9,5 Exercice 1 : Une entreprise cotée en bourse observe chaque jour l'évolution de son action et s'intéresse à la moyenne de sa valeur et aussi à sa variabilité (variance) pour ne pas avoir trop de fluctuations. On suppose que la valeur de l'action est normalement distribuée (μ et σ^2 sont inconnus). Sur une période de 21 jours on a relevé une moyenne de $\bar{x} = 12$ euros et un écart-type $s^2 = 1,62 \text{ euros}^2$.

1,5 1) Donner un estimateur sans biais de σ^2 et calculer sa valeur.

2) Donner un intervalle de confiance de niveau de sécurité $1 - \alpha = 95\%$ de la valeur moyenne de l'action de l'ensemble des valeurs de l'action.

1 3) Quelle interprétation donnez-vous à ce résultat ? (l'intervalle de confiance sert à quoi ?).

2,5 4) Établir un intervalle de confiance de niveau de sécurité $1 - \alpha = 95\%$ pour la variance de l'ensemble des valeurs de l'action.

2,5 5) Peut-on considérer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que la variance de la valeur du cours d'action est différente de la valeur de référence fixée à $\sigma_{Ref}^2 = 2,25 \text{ euros}^2$.

8 Exercice 2 : Une coopérative de chèvre devait être créée par l'initiative nationale de développement humain INDH, dans le but de mettre au marché un fromage de chèvre 100% bio. Une étude de marché au préalable a été effectuée pour le lancement de ce nouveau produit. L'étude a dénombré 2000 magasins dans la région. On a prélevé un échantillon de 700 magasins, 392 attestent être intéressés par ce nouveau fromage.

1,5 1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion d'acheteurs de ce nouveau produit.

1,5 2) Quelles sont les propriétés de cet estimateur ?

1 3) Quelle est sa loi limite ?

2 4) Donner un intervalle de confiance de cette proportion d'acheteurs avec un risque $\alpha = 2\%$.

2 5) La coopérative ne se crée réellement que si la proportion des acheteurs est supérieure à 60%. Réaliser un test pour aider les responsables de l'INDH à prendre une décision (risque d'erreur $\alpha = 5\%$).

NB : La correction de l'examen sera diffusée sur mon site <https://ddriouchi.webnode.fr> à partir de lundi 13 janvier 2020

Ex 1.

Soit X la v.a.r mesurant la valeur de l'action.

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m, σ^2 inconnus.

Sur une période $n = 21$, on a observé

$\bar{x} = 12$ et $s^2 = 1,62$. (Moyenne et variance de l'échantillon)

①. Un estimateur sans biais de σ^2 est donné par

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ or on sait que :}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ est aussi un estimateur biaisé de } \sigma^2.$$

A partir de ces 2 résultats, on en déduit que :

$$(n-1)S^2 = n\sigma^2 \Leftrightarrow \boxed{S^2 = \frac{n}{(n-1)} \sigma^2}$$

$$\text{A.N. } S^2 = \frac{21}{20} \times 1,62 = 1,701 \Rightarrow S = 1,304$$

② Puisque σ^2 inconnue est estimée par S^2 un intervalle de confiance de m est donné par :

$$I_\alpha = \left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha \right]$$

$$\text{Avec } P(T_{n-1} \leq t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow t_\alpha = t$$

le quantile de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté

$$\text{ici } n=21, \text{ et } \alpha=5\% \Rightarrow t_\alpha = t_{20, 0,975} = 2,086$$

$$I_\alpha = \left[12 - \frac{1,304}{\sqrt{21}} \cdot 2,086; 12 + \frac{1,304}{\sqrt{21}} \cdot 2,086 \right]$$

$$\boxed{I_\alpha = [12 - 0,593; 12 + 0,593] = [11,406; 12,593]}$$

②

3) L'intervalle de confiance sert à nous donner une fourchette pour la valeur estimée, il nous dit et simplement que si on réalise une mesure sur toute la population la valeur mesurée doit être incluse dans l'intervalle de confiance. Avec 95% de chance.

4) L'intervalle de confiance de σ^2 est donné par

$$IC = \left[(n-1) \frac{S^2}{b_\alpha} ; (n-1) \frac{S^2}{a_\alpha} \right]$$

$$\text{avec } P(\chi^2_{n-1} \leq a_\alpha) = \alpha/2 \Rightarrow a_\alpha = \chi^2_{20, 0,025} = 9,59$$

$$P(\chi^2_{n-1} \leq b_\alpha) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow b_\alpha = \chi^2_{20, 0,975} = 34,17$$

$$AN: (n-1)S^2 = n \cdot s^2 = 21 \times 1,62 = 34,02$$

$$IC = \left[\frac{34,02}{34,17} ; \frac{34,02}{9,59} \right] = [0,99 ; 3,547]$$

5) il s'agit du test:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_{Ref} \quad (\sigma^2_{Ref} = \sigma_0^2)$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma^2_{Ref}$$

- Il s'agit d'un échantillon de petite taille de loi normale avec un risque $\alpha = 5\%$.

- la statistique du Test est $Z = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2_{Ref}}$

- on rejette H_0 si $Z \notin [a_\alpha, b_\alpha]$ avec σ^2_{Ref}

a_α et b_α calculés dans la question 4.

$$\text{On a } Z = 20 \cdot \frac{1,701}{2,25} = 15,12 \in [a_\alpha, b_\alpha] \in [9,59 ; 34,17]$$

on accepte statistiquement H_0 c.à.d. que la variance de la valeur d'action n'est pas différente de la valeur de référence.

Ex 2:

Données: $N = 2000$ magasins taille de la Population

$n = 700$ taille de l'échantillon

(3)

On est dans un cas de taille grande. on considère

$X_1, X_2, \dots, X_{700}$ magasin ou chaque magasin est

soit $\left\{ \begin{array}{l} \text{intéressé avec une probabilité } p \\ \text{non intéressé avec une probabilité } q = 1 - p \end{array} \right.$

Il s'agit d'une loi de Bernoulli $b(p)$ donc $X_i \sim b(p)$

1) Sur les 700 interrogés, 392 ont répondu oui

une estimation de p est donnée par $\hat{p} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{700} X_i}{700}$

$\sum_{i=1}^{700} X_i$ des magasins qui ont répondu oui, $\sum_{i=1}^{700} X_i = 392$

$$\bar{X} = \frac{392}{700} = 0,56$$

2) $\bar{X}$ est un estimateur, ss biais, convergent à variance minimum

3) $\bar{X} \sim N(E(\bar{X}), V(\bar{X}))$ d'après le théorème CLT

ou $E(\bar{X}) = p$ car $\bar{X}$ est ss biais

$$V(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

[on rappelle que $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$]

4) Avec un risque $\alpha = 2\%$ on a un intervalle de confiance est donné par

$$I_\alpha = \left[\bar{X} - c_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} ; \bar{X} + c_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]$$

ou $p(W(0,1) \leq c_\alpha) = 1 - \alpha/2$ pour $\alpha = 2\%$

$$1 - \alpha/2 = 1 - 0,01 = 0,99$$

$\Rightarrow c_\alpha = 2,33$ voir table de la loi normale

Donc
$$I_\alpha = \left[\bar{X} - 2,33 \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} ; \bar{X} + 2,33 \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]$$

AN. $\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} = \sqrt{\frac{0,56(1-0,56)}{700}} = \sqrt{0,000352} = 0,0187$

$2,33 \times 0,0187 = 0,0437$, donc

$I_\alpha = [0,56 - 0,0437; 0,56 + 0,0437]$

$I_\alpha = [0,516; 0,603]$

(4)

5) Les responsables de l'INBH posent la question suivante: La coopérative se créera-t-elle?

C.à.d. $\Rightarrow p > 0,6$

Considérons cette hypothèse comme étant l'hypothèse H_1 et considérons donc:

$\begin{cases} H_0: p \leq 0,6 \\ H_1: p > 0,6 \end{cases}$

Condition d'utilisation: la taille est grande $n = 700$.

et le risque d'erreur est $\alpha = 5\%$.

La statistique de test: on pose $T = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}}$.

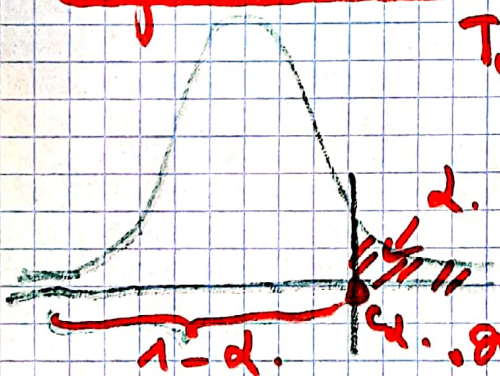
Sous l'hypothèse H_0 , $T_0 = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} \xrightarrow{n} \mathcal{N}(0,1)$

Règle de décision: on rejette H_0 si et si

$T_0 > c_\alpha$ avec $p(\mathcal{W}(0,1) \leq c_\alpha) = 1 - \alpha$.

$\alpha = 5\%$ $\Rightarrow p(\mathcal{W}(0,1) \leq c_\alpha) = 0,995$

$\Rightarrow [c_\alpha = 1,64]$



avec $T_0 = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} = \frac{0,56 - 0,6}{0,0187} = -2,139$

$T_0 = -2,139 < c_\alpha = 1,64 \Rightarrow$ on ne rejette pas H_0

Conclusion: Statistiquement et avec un risque $\alpha = 5\%$, on ne rejette pas H_0 c.à.d. $p \leq 0,6$ et donc la coopérative ne se crée pas.

Fin.