

Professeur :D.DRIOUCHI

Examen de la session de rattrapage
Durée 1h.

Important : aucun document autorisé, sauf les tables statistiques

Question de cours : (4 points)

- 1) Rappeler la loi des Grands Nombre LGN et le théorème central limite CLT
2) Après avoir donné la définition d'un estimateur, Citez les deux méthodes d'estimation et expliquer leur démarche.

Exercice 1 : On a relevé les prix du KWh d'électricité produite par une centrale nucléaire en observant un échantillon de 100 compteurs à fin de pouvoir le comparer avec une autre source d'énergie. Les résultats de l'étude montre une moyenne de prix de 0.17 euros et une variance des prix de 0,08euros².

- 1) Établir un intervalle de confiance de niveau de sécurité $1 - \alpha = 95\%$ du prix moyen du KWh d'électricité de source nucléaire
2) Peut considérer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que le prix moyen est significativement inférieur à 0,22euros.
3) Peut-on considérer avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que la variance est supérieure à 0,06.

Exercice 2 : Lors d'une étude statistique portant sur un échantillon de 600 employés d'une entreprise 450 employés sont favorables à la réduction du temps de travail avec réduction de salaire.

- 1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion p d'employés favorables à la réduction du temps de travail.
2) Montrer que cet estimateur est convergent et Calculer son risque quadratique.
3) Quelle est sa loi limite?
4) Donner un intervalle de confiance de cette proportion d'acheteurs avec un risque $\alpha = 1\%$.
5) Donner la marge d'erreur de cet intervalle.
6) Quelle taille d'échantillon aurait-il fallu pour réduire de moitié la marge d'erreur de l'intervalle précédent.
7) Le directeur de l'entreprise ne valide sa décision de réduire le temps de travail que si la proportion des employés dépasse 78%. Réaliser un test pour aider le directeur à prendre une décision (risque d'erreur $\alpha = 1\%$).

Ex 1

1) Intervalle de confiance du prix moyen en KWh/modeau.
on a $n=100$, $\bar{x}_n=0,17$ et $s_n^2=0,08$
on cherche l'intervalle de confiance de μ pour σ^2 connu
un estimateur de σ^2 est $S^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{100}{99} \times 0,08 = 0,0808$
 $\Rightarrow \boxed{S^2 = 0,2842}$

L'intervalle de confiance est donné par:

$$I_\alpha = \left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha \right]$$

avec $P(T_{n-1} \leq t_\alpha) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow t_\alpha = t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{99, 0,975}$

En regardant la table $t_{99, 0,975} = t_{100, 0,975} = 1,984$

$$I_\alpha = \left[0,17 \pm \frac{0,2842}{\sqrt{100}} \times 1,984 \right] = \left[0,17 \pm 0,056 \right]$$

$$\boxed{I_\alpha = [0,1136; 0,2263]}$$

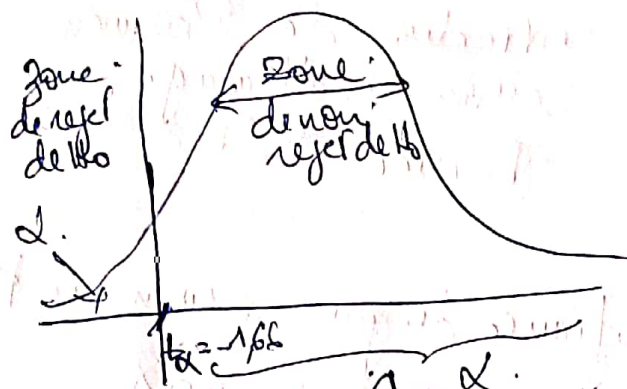
2) L'hypothèse du Test est $m \geq m_0 = 0,22$
 $m < m_0 = 0,22$

Il s'agit d'un Test unilatéral à gauche avec un seul d.s.
La statistique du Test est $T = \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}$ sous H_0 .

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow T_{n-1}$$

Règle de décision on rejette H_0 si $T \leq t_\alpha$.

avec $P(T_{n-1} \leq t_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow t_\alpha = t_{n-1, 1-\alpha} = t_{99, 0,95}$
 $\Rightarrow \boxed{t_\alpha = 1,660}$



$$t_{\alpha} = -1,66$$

(2)

on a $T_0 = \frac{0,17 - 0,22}{0,2842} = \frac{0,17 - 0,22}{0,0284} = -1,759$

Conclusion Vu que $T_0 = -1,759 < t_{\alpha} = -1,66$ on rejette H_0 .

on peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que le prix moyen du KWh est significativement inférieur à 0,22 €

3) Test $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 0,06$
 $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 0,06$

Il s'agit d'un test unilatéral à gauche de risque $\alpha = 5\%$.

La statistique du test est $Z = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2}$ sous H_0

$$Z_0 = \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Règle de décision: on rejette H_0 si $Z_0 > C_{\alpha}$ avec

$$P(\chi^2_{n-1} \leq C_{\alpha}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow C_{\alpha} = \chi^2_{n-1, 1-\alpha} = \chi^2_{99, 0,95} = 124,34$$

on a $Z_0 = \frac{99 \cdot 0,0808}{0,06} = 133,32$

on a $Z_0 = 133,32 > C_{\alpha} = 124,34 \Rightarrow$ on rejette H_0 .

on peut conclure avec un risque d'erreur $\alpha = 5\%$ que la variance est significativement supérieure à 0,06.

Exercice 2

(3)

Données $n = 600$: taille de l'échantillon.
 en cas d'un cas de taille grande, on considère

$X_1 \dots X_{600}$ employés, chacun d'eux est
 soit favorable à la réduction $\rightarrow$ avec une prob p
 soit non favorable à la réduction $\rightarrow$ " $q = 1 - p$

Il s'agit d'une loi de Bernoulli $b(p)$ avec $X_i \sim b(p)$

Sur les 450 employés, 450 ont répondu favorable.
 1) Une estimation de p est donnée par $\bar{X}$ donc $\hat{p} = \bar{X} = \frac{450}{600} = 0,75$

2) on a $\bar{X} \xrightarrow{LGN} \mu = E(X) = p$

$$V(\bar{X}) = V\left[\frac{1}{n} \sum X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum V(X_i) = \frac{n \cdot p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$R(x) = V(\bar{X}) + \left[\frac{b(x)}{p}\right]^2 \text{ ou le biais est nul car } \bar{X} \text{ est sans biais}$$

$$\text{donc } \boxed{\text{Risque} = V(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}}$$

$$3) \begin{aligned} \bar{X} &\rightsquigarrow N(E(\bar{X}), V(\bar{X})) \text{ d'après le CLT} \\ \bar{X} &\rightsquigarrow N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightsquigarrow N(0,1) \end{aligned}$$

4) $n = 600 > 30$ échantillon grand avec $\alpha = 1\%$. on a un intervalle de confiance : donné par

$$I_\alpha = \left[\bar{X} - c_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + c_\alpha \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \right]$$

$$\text{ou } P(W(0,1) \leq c_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \Rightarrow \boxed{c_\alpha = 2,58}$$

$$I_\alpha = \left[0,75 \pm 2,58 \sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{600}} \right] = \left[0,75 \pm 4,6\% \right]$$

$$\boxed{I_\alpha = [70,4\%, 79,6\%]}$$

5) La marge d'erreur est $E = 2,58 \sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{600}} = 4,6\%$

④

6) $E = 4,6\%$

$\Rightarrow \frac{E}{2} = \text{samoché} = 2,3\%$

$2,3\% = U_{1/2} \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} \Rightarrow n^* = \left(\frac{U_{1/2}}{E^*} \right)^2 \bar{x}(1-\bar{x})$

$n^* = \left(\frac{2,58}{0,023} \right)^2 0,75 \times 0,25 = 2,359,31 \approx 2359$

7) Le directeur ne valide la décision que si $p > 0,78$
considérons cette hypothèse comme étant H_1 et on a donc

$H_0: p \leq 0,78$

$H_1: p > 0,78$

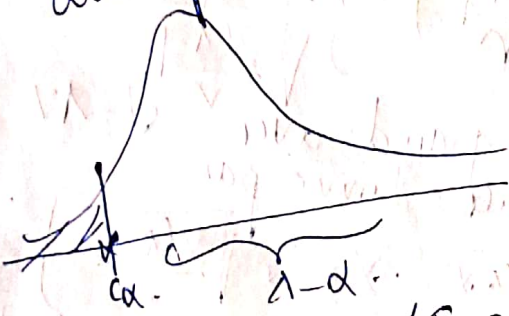
Condition d'utilisation: La taille est gde avec $\alpha = 2\%$

La statistique du test: on pose $T = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}}$

Sous l'hypothèse H_0 $T_0 = \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}} \rightarrow N(0,1)$

Règle de décision: on rejette H_0 si $T_0 > c_\alpha$
avec $P(W(0,1) \leq c_\alpha) = 1 - \alpha = 1 - 0,02 = 0,98$

$\Rightarrow c_\alpha = 0,8365$



on a $T_0 = \frac{0,75 - 0,78}{\sqrt{\frac{0,75 \times 0,25}{600}}} = \frac{-0,03}{0,0176} = -1,7$

on a $T_0 = -1,7 < c_\alpha = 0,8365 \Rightarrow$ on ne rejette pas H_0

Conclusion Statistiquement, et avec un risque $\alpha = 2\%$,
on ne rejette pas H_0 c-à-d $p \leq 0,78$ et donc

Le directeur ne prendra pas la décision de réduire le
temps du travail

Fin