

Série d'exercices n°2

Exercice 1 : En 1897, l'économiste Vilfredo Pareto (1848-1923), professeur d'économie politique à l'université de Lausanne en Suisse, eut l'idée de modéliser la loi des revenus en postulant que le nombre relatif de personnes dont le revenu dépasse une valeur x est inversement proportionnel à une puissance de x . la définition suivante fut adoptée : une variable aléatoire X , suit une loi de Pareto de paramètres α et θ (on note $X \sim P(\alpha; \theta)$) si sa densité est

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1) \theta^{\alpha-1}}{x^\alpha} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(x) = 0 \text{ ailleurs, } (\theta > 0, \alpha > 1)$$

On suppose ici que α est connu. On donne les deux caractéristiques de la loi de X ,

$$E(X) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}\right) \theta \text{ pour } \alpha > 2 \text{ et } Var(X) = \frac{(\alpha - 1) \theta^2}{(\alpha - 3)(\alpha - 2)^2} \text{ pour } \alpha > 3$$

1. Déterminez l'estimateur T_n de θ par la méthode des moments.
2. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de la v.a. X . Posons la statistique V_n :

$$V_n = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$\text{On peut montrer que } E(V_n) = \left(\frac{n(\alpha - 1)}{n(\alpha - 1) - 2}\right) \theta \text{ et } Var(V_n) = \frac{n(\alpha - 1) \theta^2}{(n(\alpha - 1) - 2)(n(\alpha - 1) - 1)^2}$$

Peut-on proposer un e.s.b. de θ en se basant sur la statistique V_n ?

3. Comparez les deux estimateurs T_n et V_n .

Exercice 2 : On s'intéresse à la fiabilité d'un équipement industriel. Soit X la v.a. égale au nombre de pannes de cet équipement, on va supposer que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, où λ est un paramètre inconnu.

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x! \text{ avec } x \in \mathbb{N}$$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de la v.a. X . On pose,

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

1. Quelle est la loi de S_n . Expliquer pourquoi $\bar{X}_n$ est un estimateur de λ par la méthode des moments, rappeler ses propriétés.
2. Maintenant, on veut estimer la probabilité qu'il n'y ait aucune panne. On notera cette probabilité θ .
 - a. Exprimer θ en fonction de λ .
 - b. Montrer que $\hat{\theta}_n$, défini ci-dessous, est un estimateur sans biais de θ .

$$\hat{\theta}_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$$

- c. L'observation d'un échantillon de X a donné les résultats suivants,

2	2	1	1	4	3	4	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Donner une estimation de θ .

Exercice 3 : Dans une enquête, on a demandé à 1500 personnes de reconnaître leur source la plus importante d'informations ; 65% ont déclaré que l'internet était leur principale source d'informations.

1. Construire un intervalle de confiance pour la proportion de la population qui considère l'internet comme sa principale source d'information. On prendra un niveau de confiance égal à 95%.
2. De quelle taille l'échantillon devrait-il être pour estimer la proportion de la population avec une marge d'erreur de 0.02 ?

Exercice 4 : Les données d'échantillon ESAR suivantes sont issues d'une population de moyenne μ et de variance σ^2 inconnues :

14	13	11	12	9	13	13	11	10	12
----	----	----	----	---	----	----	----	----	----

On donne $\sum_{i=1}^{10} x_i = 118$ et $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_{10})^2 = 21.6$

1. Donner une estimation de μ et de σ^2 .
2. Calculez l'intervalle de confiance de μ au niveau de confiance 95%.
3. Calculez l'intervalle de confiance de l'écart-type σ au niveau de confiance 95%.
4. Si on suppose que l'écart-type est connu égal à 2, que devient l'intervalle de confiance de μ au même niveau de confiance 95%.

Exercice 5 : Dans une élection, on s'intéresse à la proportion p des votants qui favorisent le candidat A. On désire estimer p en utilisant un intervalle de niveau de confiance 95%.

1. Quel le nombre minimal d'électeurs qu'on doit observer pour obtenir une erreur d'estimation de $\pm 1\%$?
Un premier sondage sur seulement 100 électeurs a révélé que 23 sont favorables pour le candidat A.
2. Quel est l'intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95%.
3. Si on veut réaliser un deuxième sondage, quel est le nombre minimal d'électeurs qu'on doit choisir afin de garantir toujours une erreur d'estimation de $\pm 1\%$.

Exercice 6 : Soit une population normale de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 1.5$. On y a prélevé un échantillon aléatoire simple d'effectif $n = 9$. Les observations sont les suivantes :

24.3	24.7	23.2	23.8	24.5	26.0	25.4	24.8	23.8
------	------	------	------	------	------	------	------	------

1. Trouvez un intervalle de confiance pour μ . Le niveau de signification est égal à 5%.
2. Déduisez les erreurs absolue et relative de l'estimation.
3. Supposons que σ est inconnue, trouvez un intervalle de confiance pour μ .

Exercice 7 : Un comptable pense que les problèmes de liquidité d'une entreprise sont une conséquence directe de l'encaissement lent des comptes fournisseurs. Le comptable prétend qu'au moins 70% des comptes fournisseurs datent de plus de deux mois. Un échantillon de 120 comptes fournisseurs a révélé que 88 dataient de plus de deux mois.

1. Quelle est l'estimation ponctuelle de la proportion p de comptes fournisseurs datant de plus de deux mois. Ensuite, donnez un intervalle de confiance à 99% pour p .
2. Déterminez la taille minimum n de l'échantillon à prélever pour que l'erreur absolue de l'estimation (au niveau de confiance 99%) soit inférieure à 3%.

Exercice 8 : Une entreprise mène une politique de formation du personnel. Au cours de l'année l'ensemble de ces 200 employés ont suivi une même formation intitulée «FC». Le directeur s'intéresse à l'ancienneté de ces employés ainsi qu'à leur satisfaction de la FC.

- I. Le directeur a demandé à un nombre n de ces employés choisis au hasard avec remise (ESAR) leurs anciennetés dans l'entreprise : la moyenne de l'échantillon est $\bar{x} = 68$ mois et l'écart-type échantillon $s = 24$ mois. Déterminer les intervalles de confiance de l'ancienneté moyenne des employés dans les cas suivants $n = 9$ et $n = 50$.
- II. Le directeur a demandé à 50 de ses employés s'ils étaient satisfaits de la FC ; 40 se sont déclarés satisfaits.
 1. Supposons que les employés sont choisis au hasard et avec remise. Déterminer l'intervalle de confiance de la proportion des employés satisfaits de la formation.
 2. Supposons maintenant que les employés sont choisis au hasard et sans remise.
 - a. Dans ces conditions peut-on affirmer que L'ESSR donnera approximativement les mêmes résultats que l'ESAR? pourquoi?
 - b. Proposer un intervalle de confiance à 90% de la proportion des employés satisfaits de la formation.
 - c. Déterminer la taille minimum n de l'échantillon nécessaire afin que l'erreur absolue de l'estimation (toujours à 90%) ne dépasse pas 5%.